大规模三维重建中的增量式运动平均方法

Incremental Motion Averaging in Large-Scale 3D Reconstruction

高 翔

中国科学院自动化研究所

电子邮箱：xiang.gao@ia.ac.cn

个人主页：https://xgao-3dv.github.io/

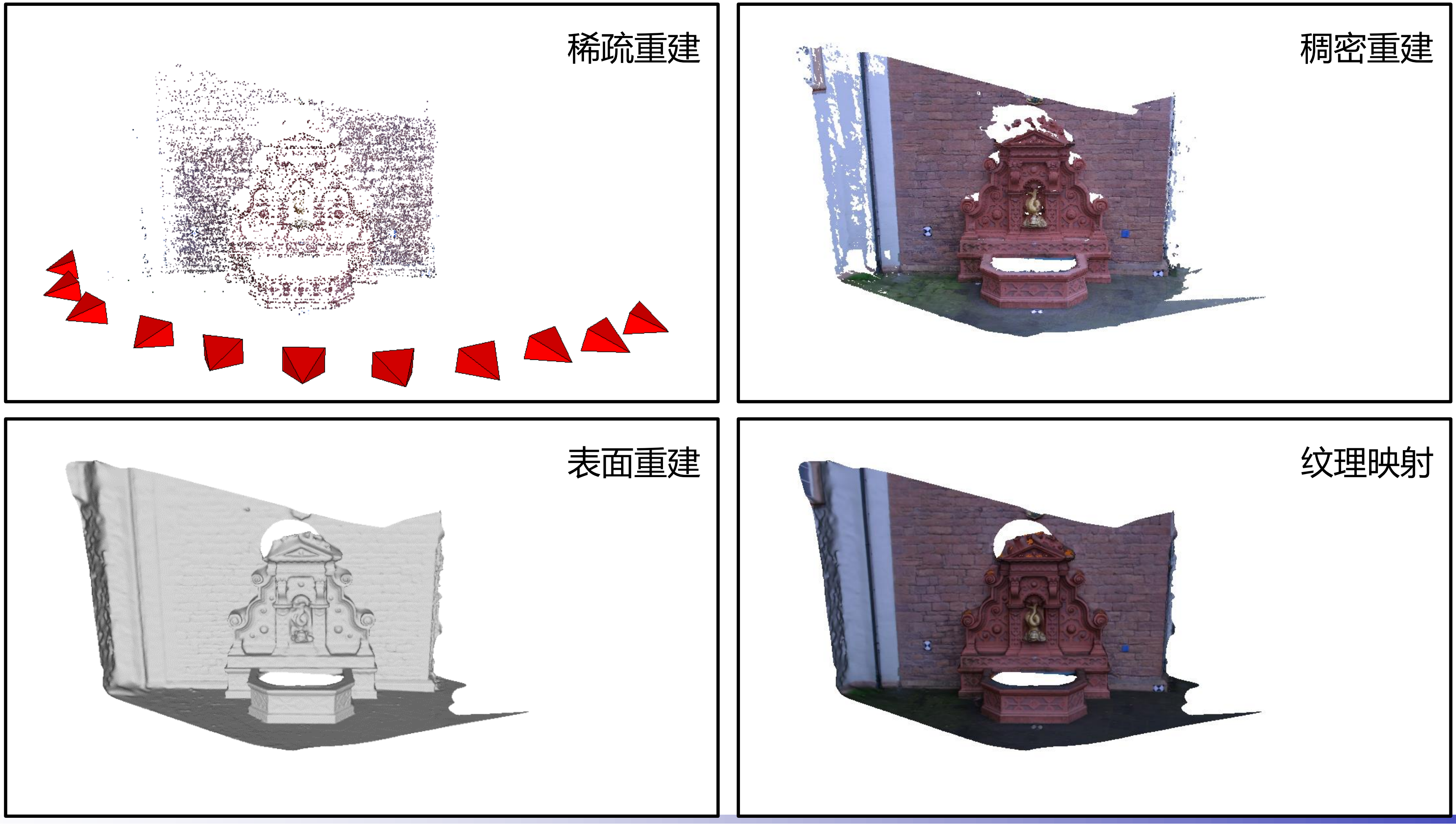
研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM：输入图像集合，输出**相机绝对位姿与场景稀疏表达**

Snavely et al. PIEEE 2010

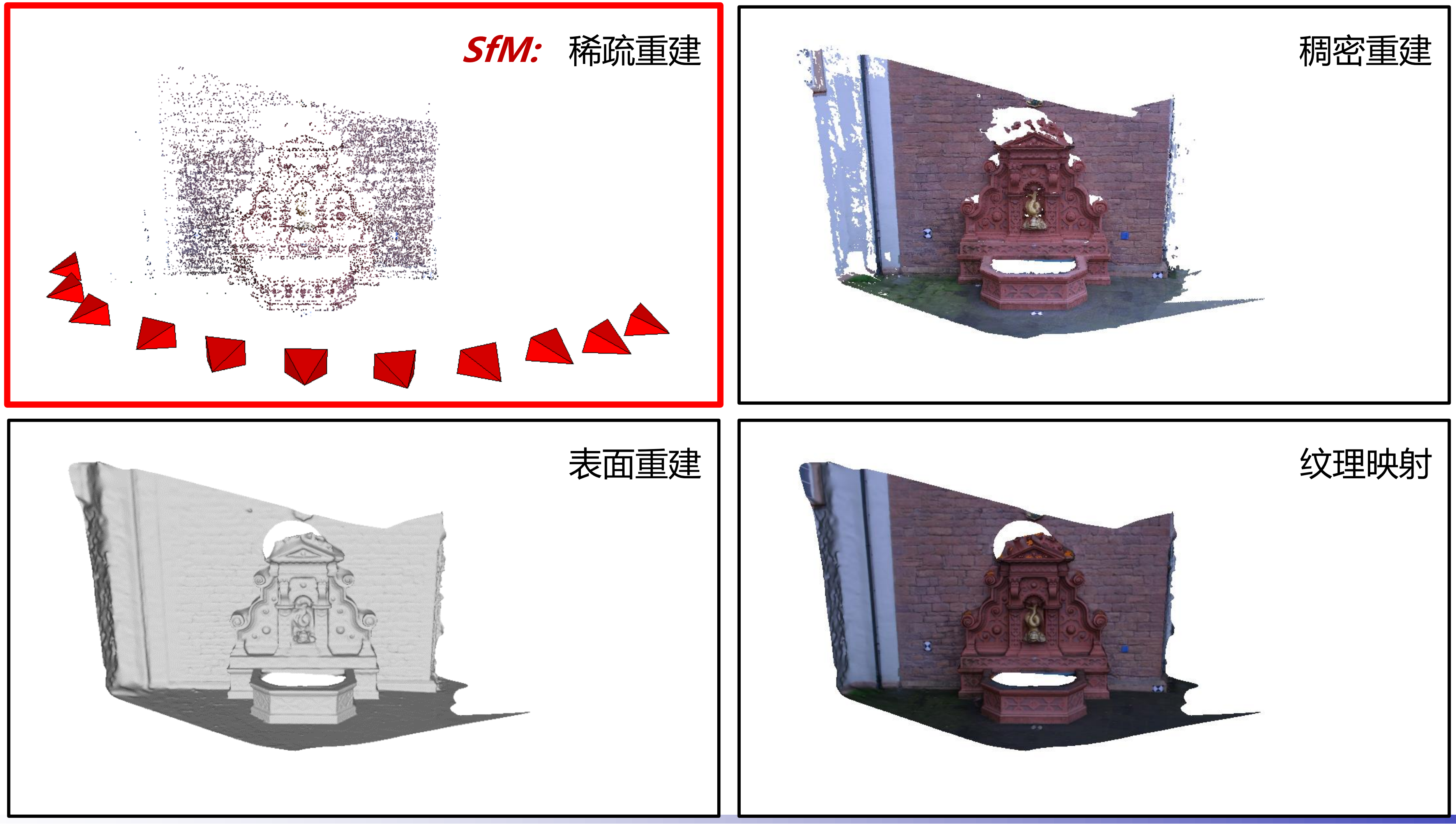
研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM是基于图像的建模（**Image-Based Modeling**）流程中的核心步骤



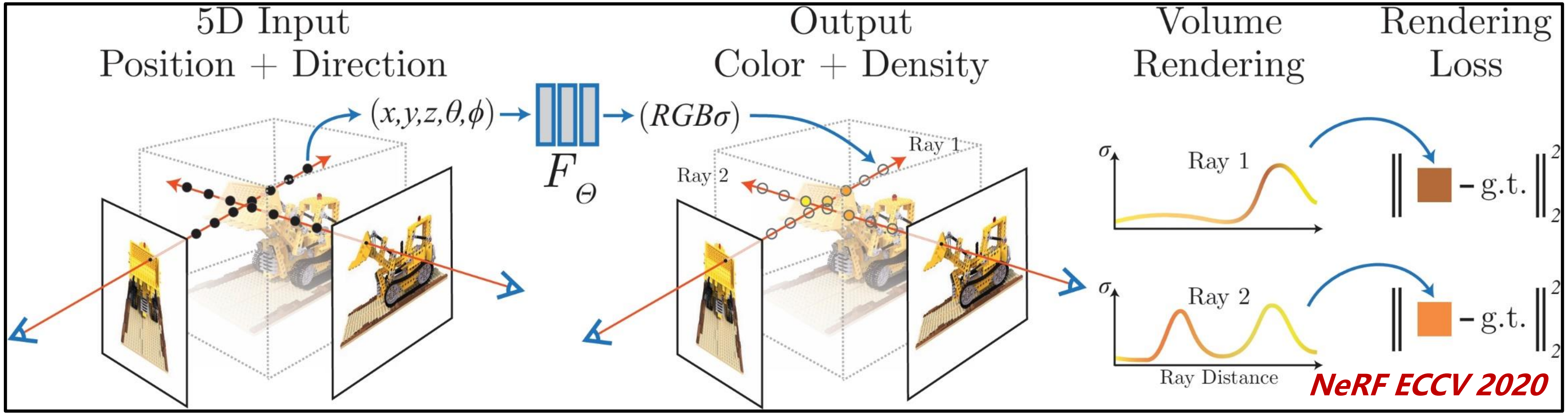
研究背景

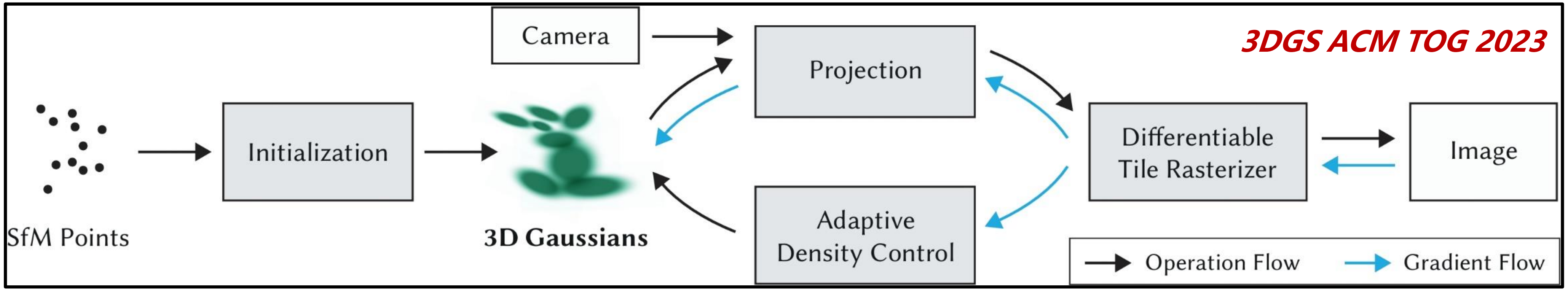
- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM是基于图像的建模（**Image-Based Modeling**）流程中的核心步骤



研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM也是神经渲染方法（如**NeRF**、**3D Gaussian Splatting**等）的关键先验

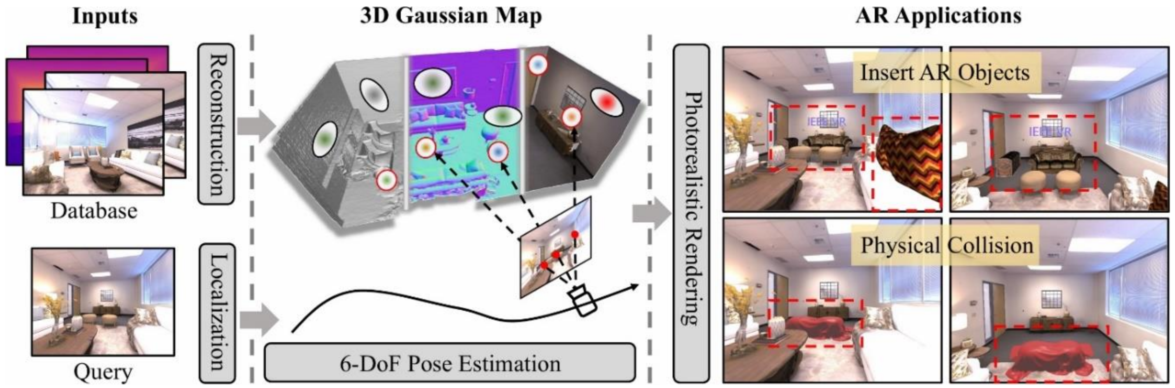




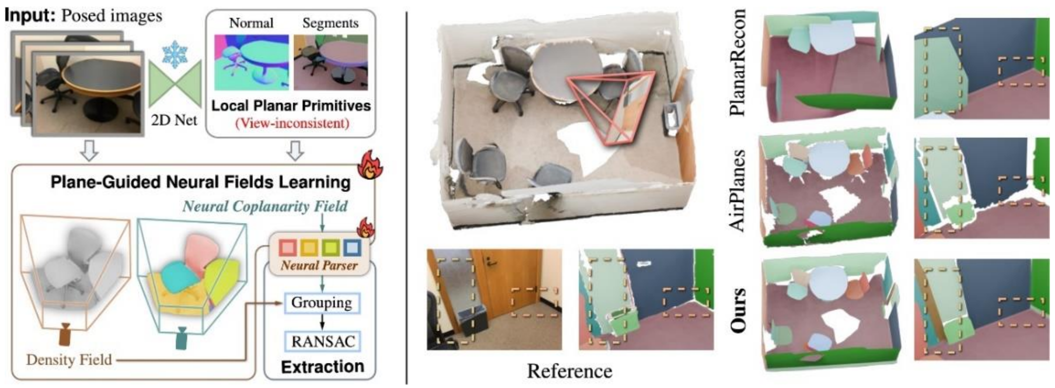
By X. Gao

研究背景

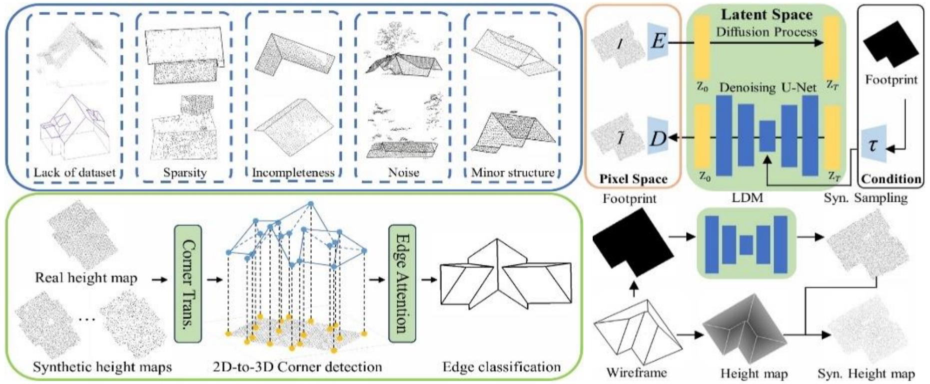
- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - SfM在**混合现实**、室内建模、遥感测绘、自动驾驶等领域有着重要的应用



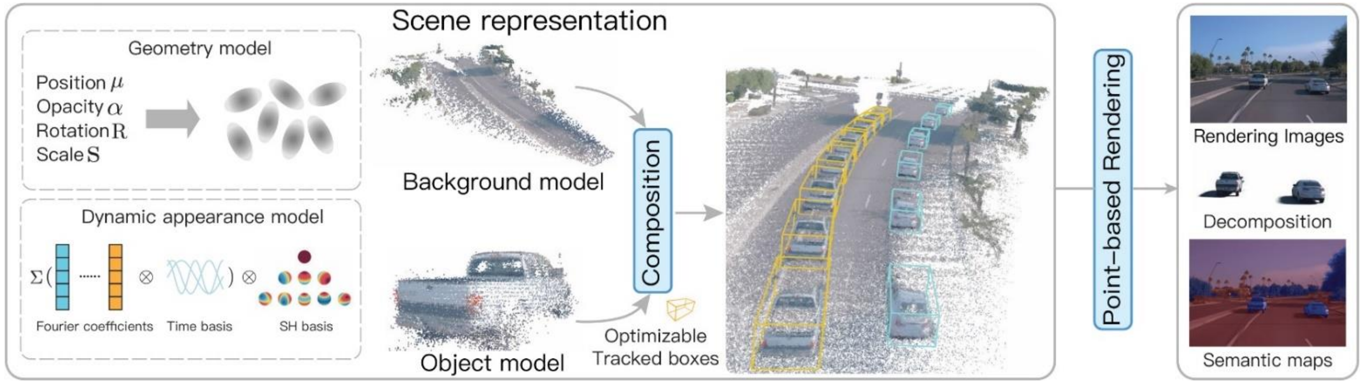
Mixed Reality: SplatLoc IEEE T-VCG 2025



Indoor Modeling: NeuralPlane ICLR 2025

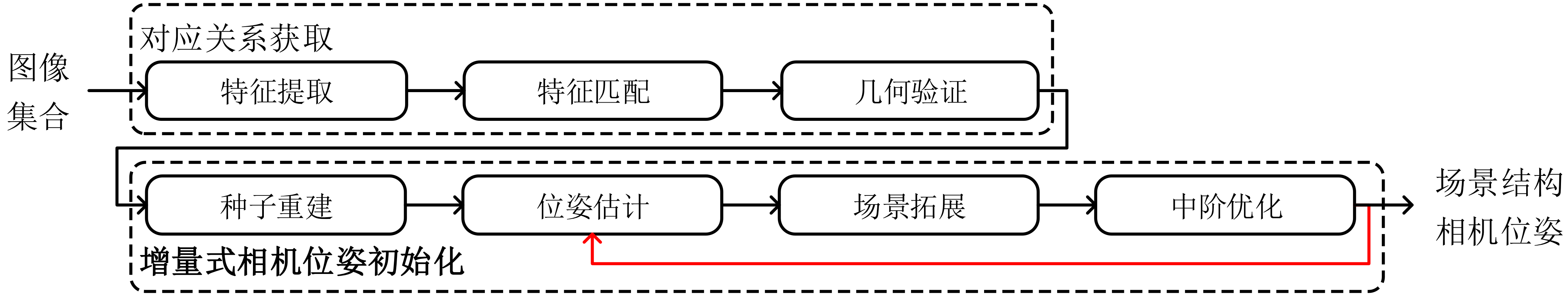


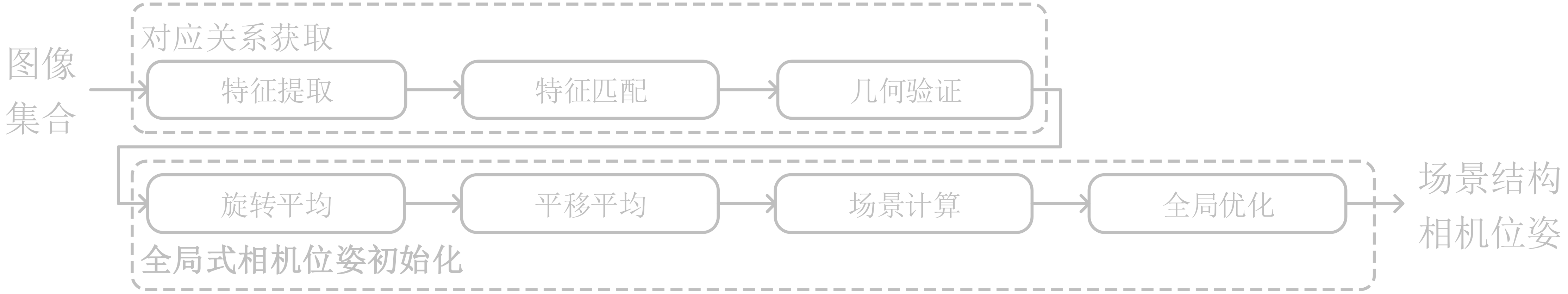
Remote Sensing: BWFormer CVPR 2025



Autonomous Driving: StreetGaussians ECCV 2024

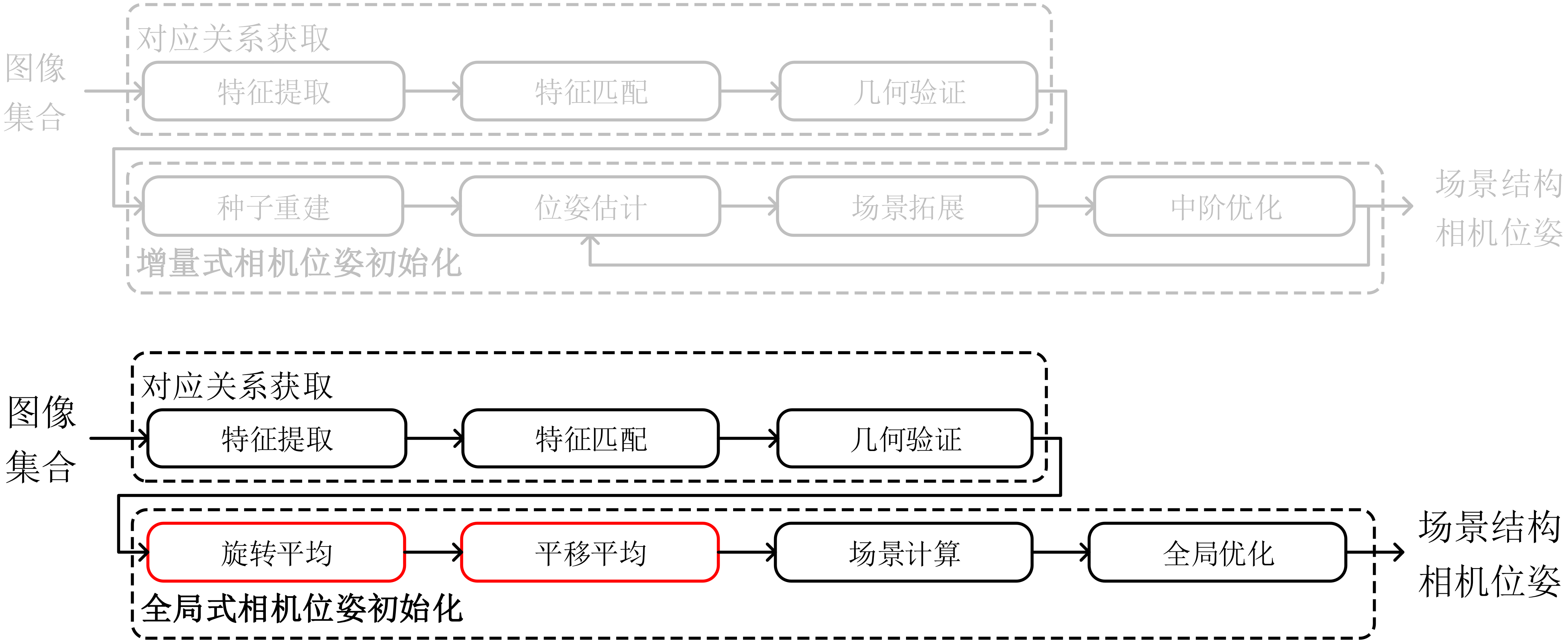
- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - 根据相机位姿初始化方式，SfM可分为**增量式SfM**与全局式SfM两类





研究背景

- 从运动恢复结构（Structure from Motion, SfM）
  - 根据相机位姿初始化方式，SfM可分为增量式SfM与**全局式SfM**两类

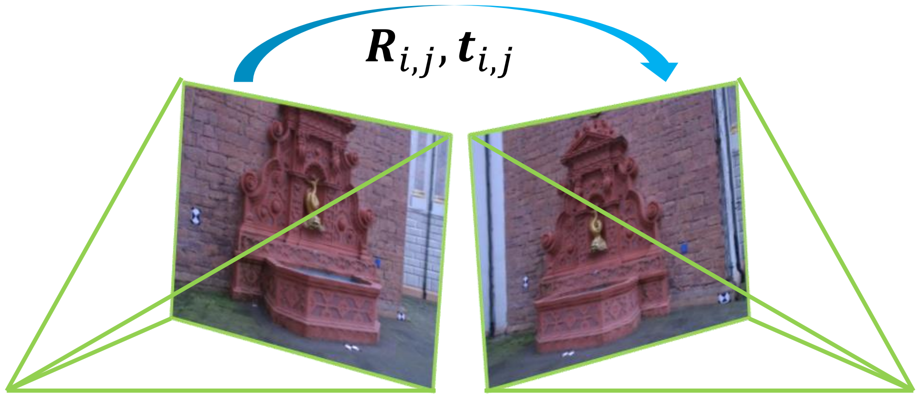


研究背景

- 增量式SfM vs. 全局式SfM
    - 增量式SfM
        - 😃精度更高、鲁棒性更强、……
        - 🥺效率较低、场景漂移、……
    - 全局式SfM
        - 😃效率更高、一致性更好、……
        - 🥺精度较差、场景缺失、……

研究背景

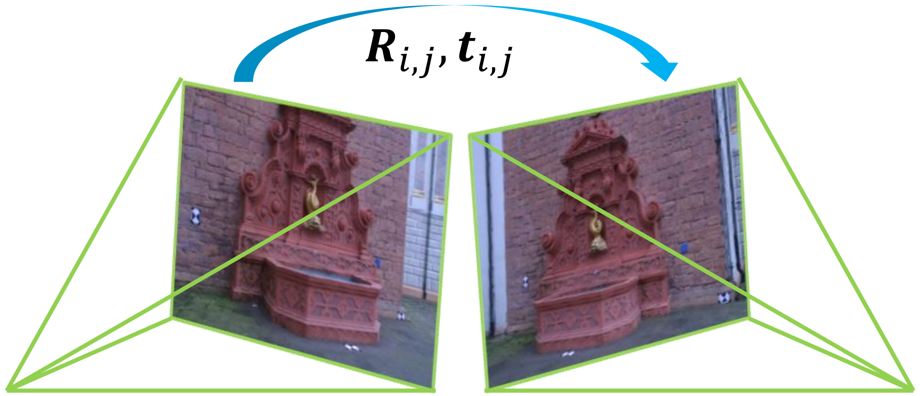
- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - MA：**相对运动**估计



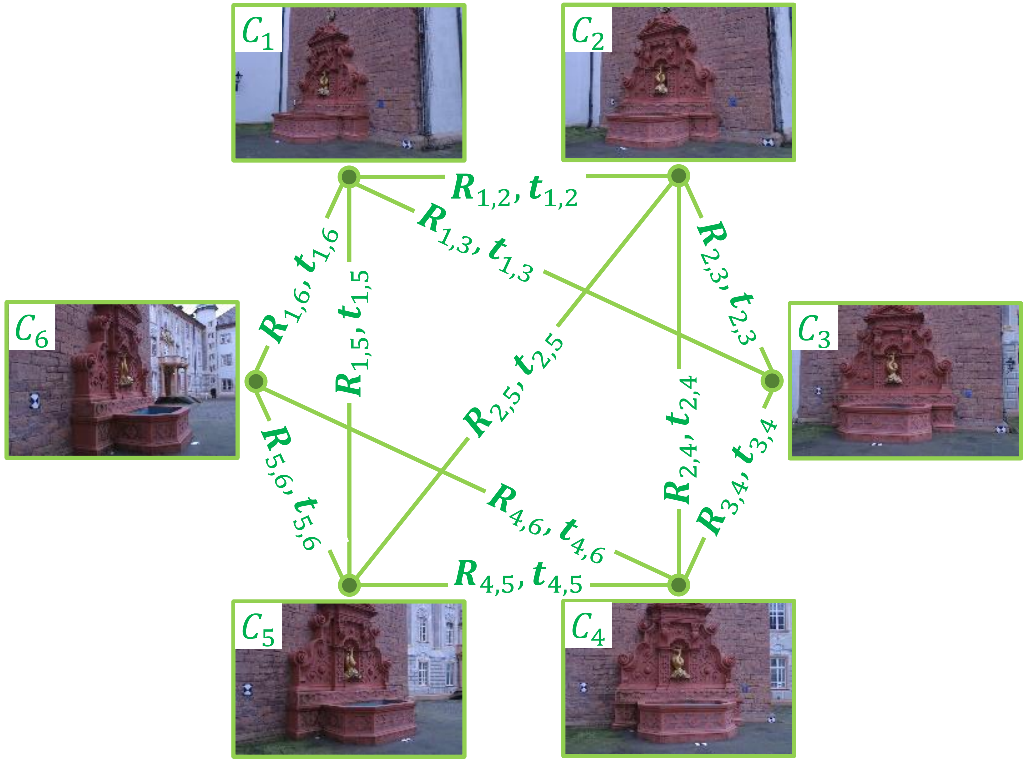
相对运动估计

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - MA：**相对运动**估计 → **外极几何图**（**Epipolar-geometry Graph, EG**）构建



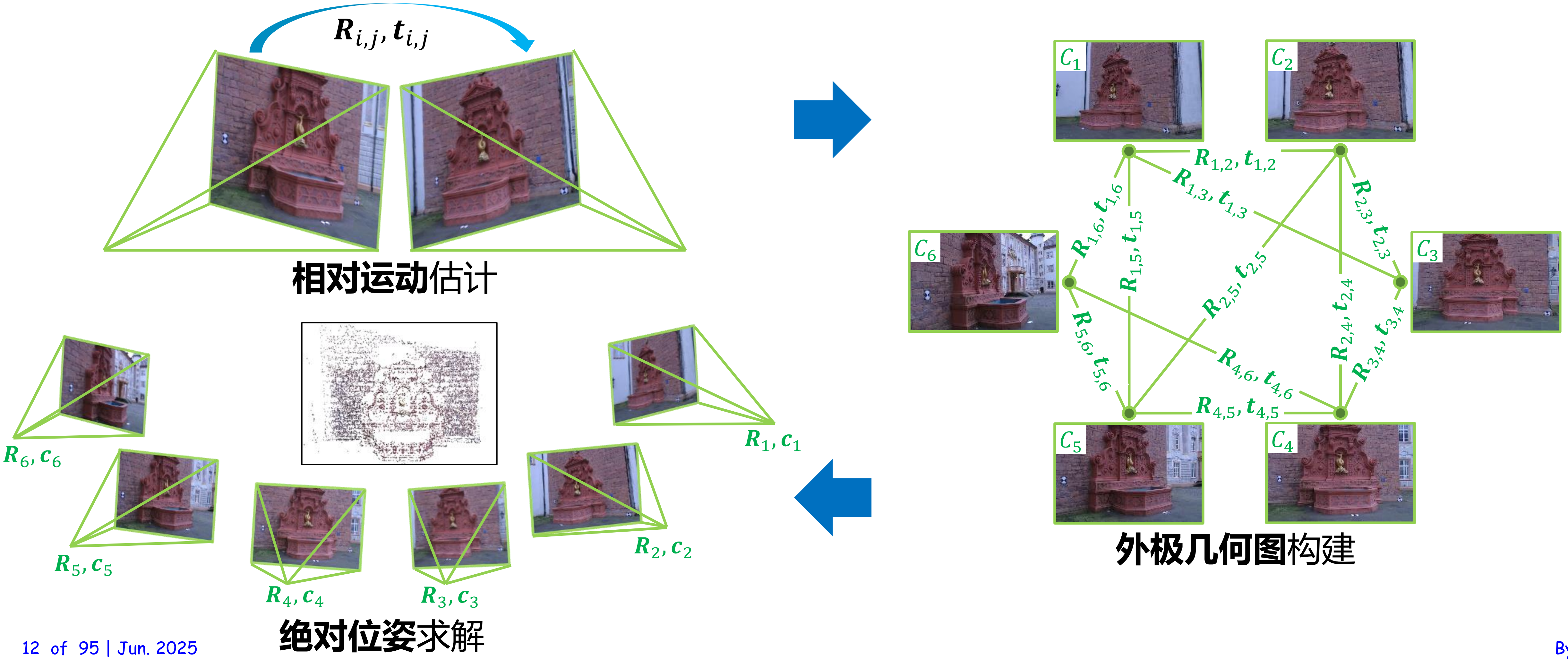
相对运动估计



外极几何图构建

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - MA：**相对运动**估计 → **外极几何图**（**Epipolar-geometry Graph, EG**）构建 → **绝对位姿**求解



研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 相对运动（旋转、平移）$\{\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{t}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$的获取方式：
    - 局部特征的**提取**与**匹配**

局部特征的**提取**与**匹配**

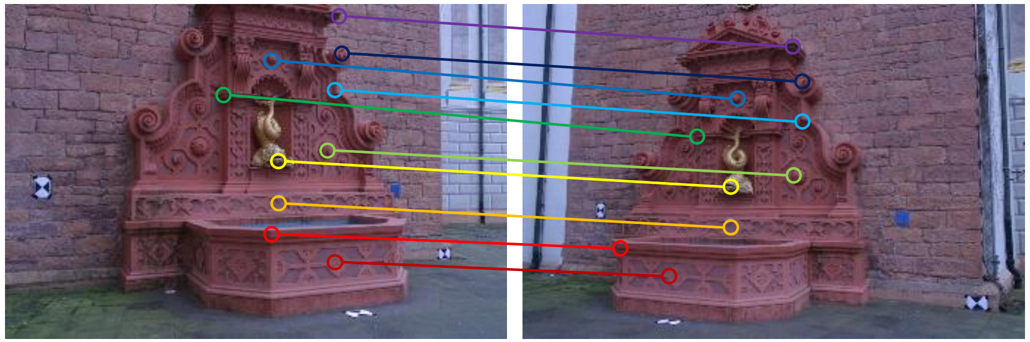
研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 相对运动（旋转、平移）$\{\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{t}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$的获取方式：
    - 局部特征的**提取**与**匹配**

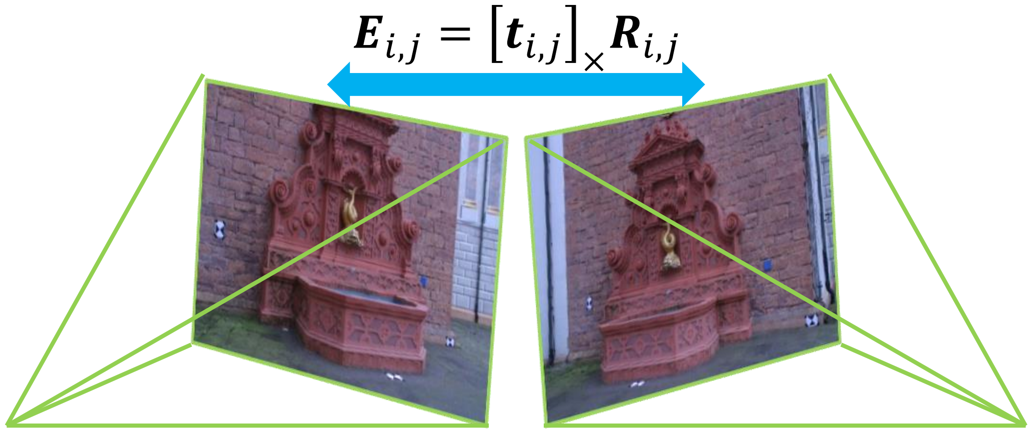
局部特征的**提取**与**匹配**

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 相对运动（旋转、平移）$\{\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{t}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$的获取方式：
    - 局部特征的**提取与匹配**
    - 本质矩阵的**估计与分解**



局部特征的**提取与匹配**

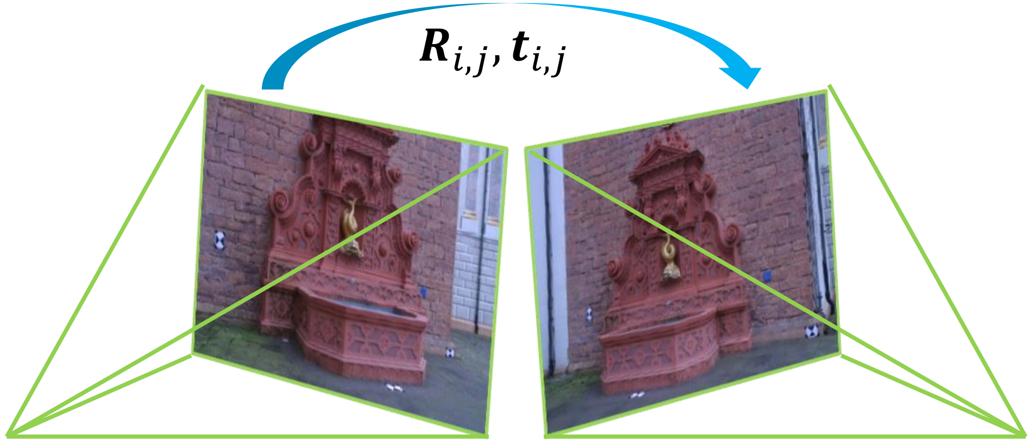


本质矩阵的**估计与分解**

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 相对运动（旋转、平移）$\{\boldsymbol{R}_{i,j},\boldsymbol{t}_{i,j}|e_{i,j}\in\mathcal{E}\}$的获取方式：
    - 局部特征的**提取**与**匹配**
    - 本质矩阵的**估计**与**分解**

局部特征的**提取**与**匹配**



本质矩阵的**估计**与**分解**

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 运动平均包括旋转平均（Rotation Averaging, RA）与平移平均（Translation Averaging, TA），是**全局式**SfM中的核心步骤
  - RA：给定相机之间的相对旋转$\{\boldsymbol{R}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$，求解在同一基准下所有相机的绝对旋转$\{\boldsymbol{R}_i | v_i \in \mathcal{V}\}$
    - 基本约束：$\boldsymbol{R}_{i,j} = \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{R}_i^\top$
    - 优化方程：$\{\boldsymbol{R}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{e_{i,j} \in \mathcal{E} \\ v_i, v_j \in \mathcal{V}}} \rho\left(d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{R}_i^\top\right)\right)$

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 运动平均包括旋转平均（Rotation Averaging, RA）与平移平均（Translation Averaging, TA），是**全局式**SfM中的核心步骤
  - RA：给定相机之间的相对旋转$\{\boldsymbol{R}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$，求解在同一基准下所有相机的绝对旋转$\{\boldsymbol{R}_i | v_i \in \mathcal{V}\}$
    - 基本约束： $\boldsymbol{R}_{i,j} = \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{R}_i^\top$
    - 优化方程：$\{\boldsymbol{R}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{e_{i,j}\in\mathcal{E} \\ v_i,v_j\in\mathcal{V}}} \rho\left(d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j \boldsymbol{R}_i^\top\right)\right)$
  - TA：给定相机之间的相对平移$\{\boldsymbol{t}_{i,j} | e_{i,j} \in \mathcal{E}\}$，求解在同一基准下所有相机的绝对位置$\{\boldsymbol{c}_i | v_i \in \mathcal{V}\}$
    - 基本约束： $\boldsymbol{t}_{i,j} = \boldsymbol{R}_j \frac{\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j\|}$
    - 优化方程：$\{\boldsymbol{c}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{e_{i,j}\in\mathcal{E} \\ v_i,v_j\in\mathcal{V}}} \rho\left(d_{\boldsymbol{t}}\left(\boldsymbol{t}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j \frac{\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j\|}\right)\right)$

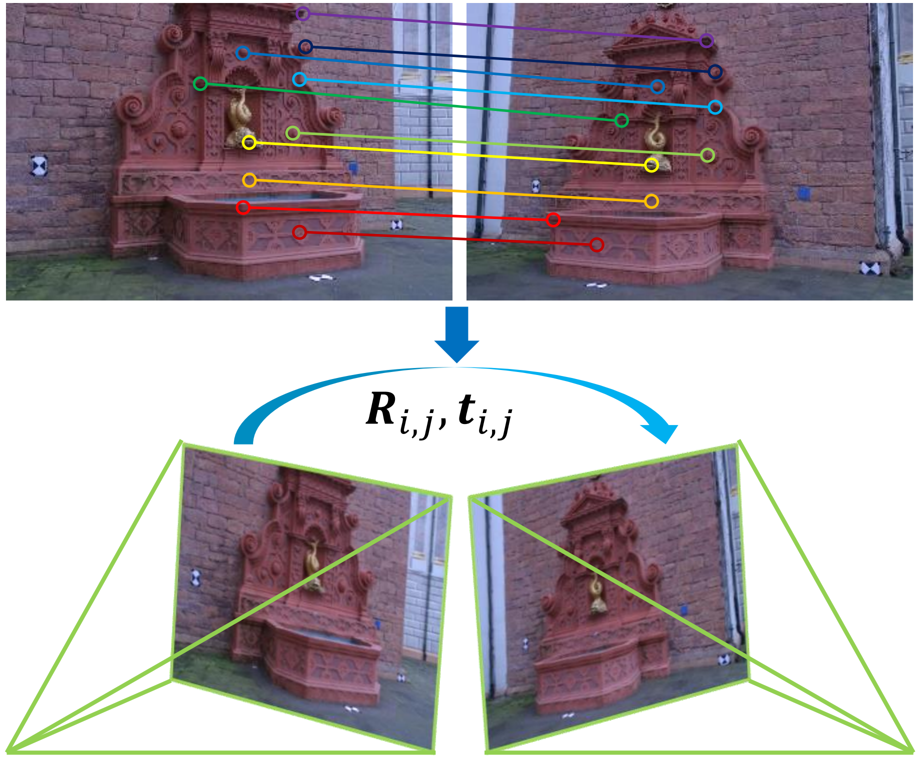
研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 相对于RA，TA问题更加困难，主要体现在
    - 通过本质矩阵分解得到的相对平移具有**尺度不确定性**[1]
    - 相对平移估计精度比旋转更容易受到**特征误匹配**影响[1]
    - 平移平均的**问题可解性**对外极几何图有着更高的要求[2]
    - 平移平均问题的求解需要需要**预先已知**相机绝对旋转[2]

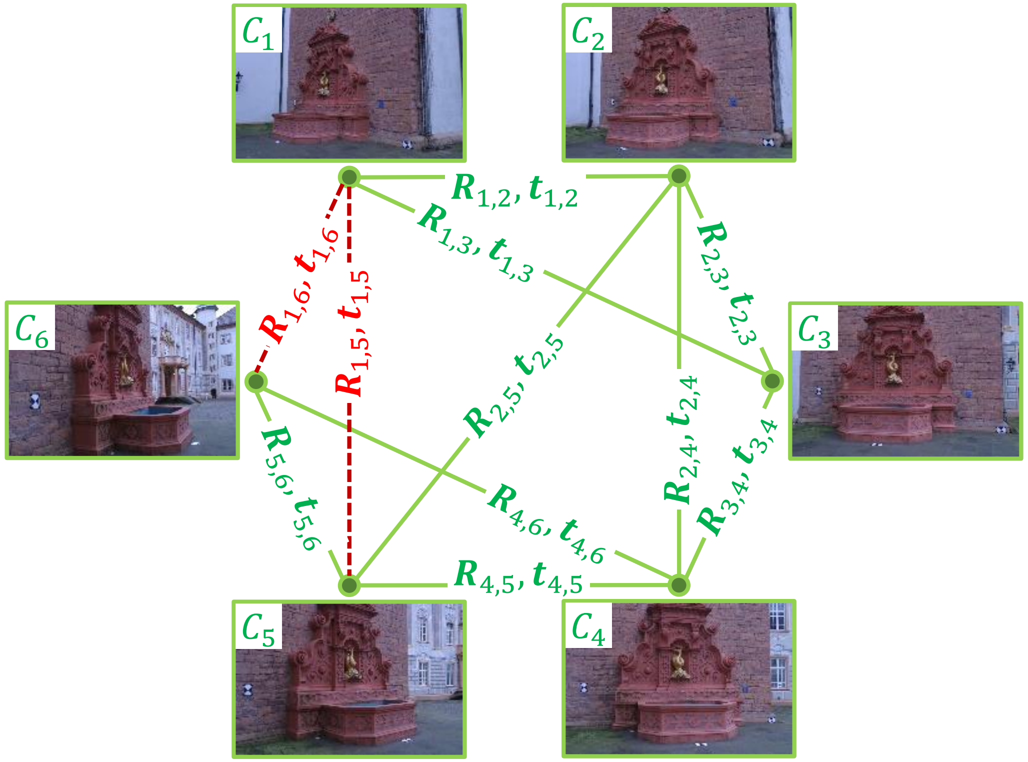
[1] D. Nister. An Efficient Solution to the Five-Point Relative Pose Problem[J]. *IEEE T-PAMI*, 2004.
[2] O. Ozyesil and A. Singer. Robust Camera Location Estimation by Convex[C]. *In Proc. CVPR*, 2015.

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 运动平均问题的**主要难点**在于如何利用存在测量外值的相对运动精确估计相机的绝对位姿



相对运动估计



外极几何图构建

研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 运动平均问题的**主要难点**在于如何利用存在测量外值的相对运动精确估计相机的绝对位姿
  - 现有的运动（旋转/平移）平均方法主要包括两类：
    - **鲁棒优化**方法：RA[1-2]、TA[3-4]，形式复杂、效率欠佳
    - **外值滤除**方法：RA[5-6]、TA[7-8]，chicken-and-egg problem

[1] A. Chatterjee and V. M. Govindu. Robust Relative Rotation Averaging[J]. *IEEE T-PAMI*, 2018.
[2] Y. Shi and G. Lerman. Message Passing Least Squares Framework and its Application to Rotation Synchronization[C]. *In Proc. ICML*, 2020.
[3] T. Goldstein, P. Hand, C. Lee, V. Voroninski, and S. Soatto. ShapeFit and ShapeKick for Robust, Scalable Structure from Motion[C]. *In Proc. ECCV*, 2016.
[4] B. Zhuang, L. Cheong, and G. H. Lee. Baseline Desensitizing in Translation Averaging[C]. *In Proc. CVPR*, 2018.
[5] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.
[6] S. H. Lee and J. Civera. HARA: A Hierarchical Approach for Robust Rotation Averaging[C]. *In Proc. CVPR*, 2022.
[7] K. Wilson and N. Snavely. Robust Global Translations with 1DSfM[C]. *In Proc. ECCV*, 2014.
[8] C. Sweeney, T. Sattler, T. Höllerer T, M. Turk, and M. Pollefeys. Optimizing the Viewing Graph for Structure-from-Motion[C]. *In Proc. ICCV*, 2015.

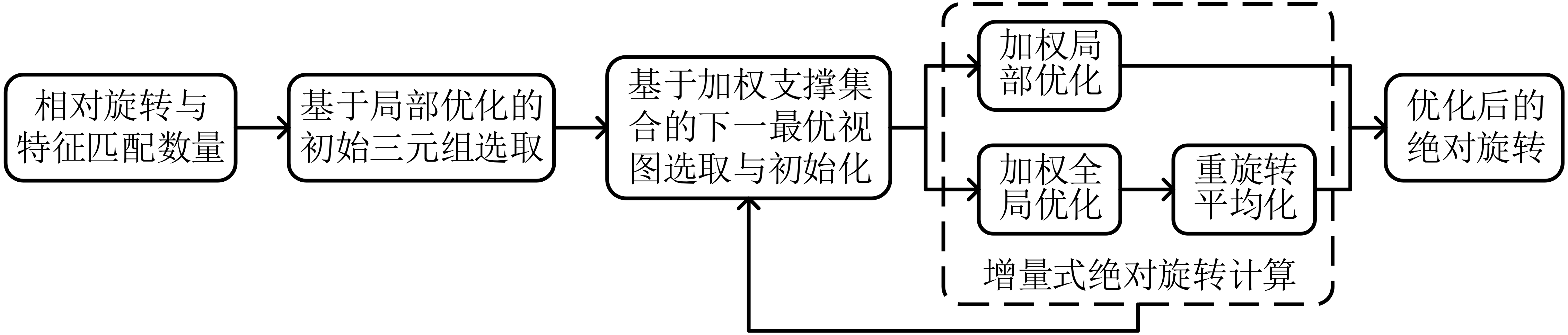
研究背景

- 运动平均（Motion Averaging, MA）
  - 运动平均问题的**主要难点**在于如何利用存在测量外值的相对运动精确估计相机的绝对位姿
  - 现有的运动（旋转/平移）平均方法主要包括两类：
    - **鲁棒优化**方法：RA[1-2]、TA[3-4]，形式复杂、效率欠佳
    - **外值滤除**方法：RA[5-6]、TA[7-8]，chicken-and-egg problem
  - 针对上述问题，我们在大规模运动平均的鲁棒性问题研究方面开展了一些探索：
    - 可在滤除相对运动测量外值**同时**估计相机的绝对位姿
    - 以期实现简单、高效、精确、鲁棒的**大规模**运动平均

[1] A. Chatterjee and V. M. Govindu. Robust Relative Rotation Averaging[J]. *IEEE T-PAMI*, 2018.
[2] Y. Shi and G. Lerman. Message Passing Least Squares Framework and its Application to Rotation Synchronization[C]. *In Proc. ICML*, 2020.
[3] T. Goldstein, P. Hand, C. Lee, V. Voroninski, and S. Soatto. ShapeFit and ShapeKick for Robust, Scalable Structure from Motion[C]. *In Proc. ECCV*, 2016.
[4] B. Zhuang, L. Cheong, and G. H. Lee. Baseline Desensitizing in Translation Averaging[C]. *In Proc. CVPR*, 2018.
[5] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.
[6] S. H. Lee and J. Civera. HARA: A Hierarchical Approach for Robust Rotation Averaging[C]. *In Proc. CVPR*, 2022.
[7] K. Wilson and N. Snavely. Robust Global Translations with 1DSfM[C]. *In Proc. ECCV*, 2014.
[8] C. Sweeney, T. Sattler, T. Höllerer T, M. Turk, and M. Pollefeys. Optimizing the Viewing Graph for Structure-from-Motion[C]. *In Proc. ICCV*, 2015.

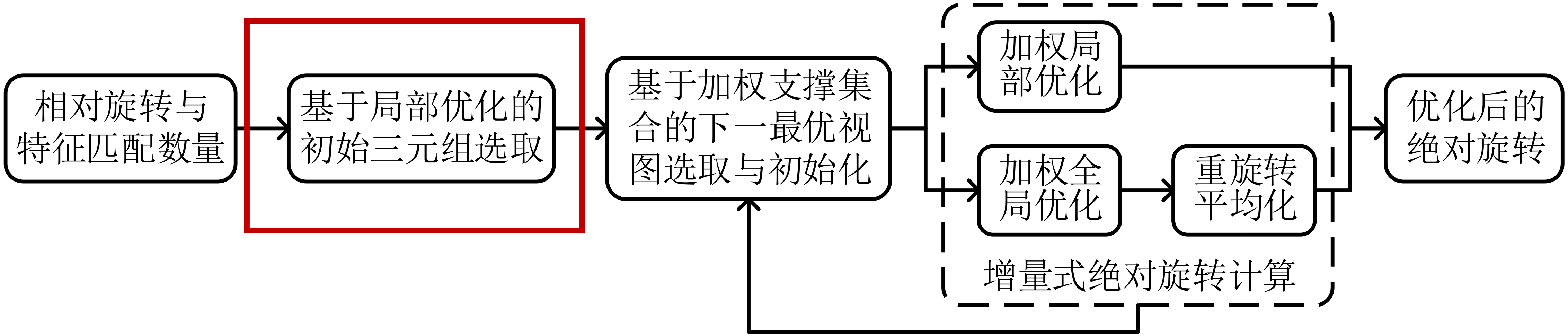
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 方法概述
  - IRA采用与增量式SfM类似的**增量式**参数估计流程
    - 更加精确、鲁棒
  - 旋转平均问题相对于SfM问题待估计的**参数量**更少
    - 更加简单、高效



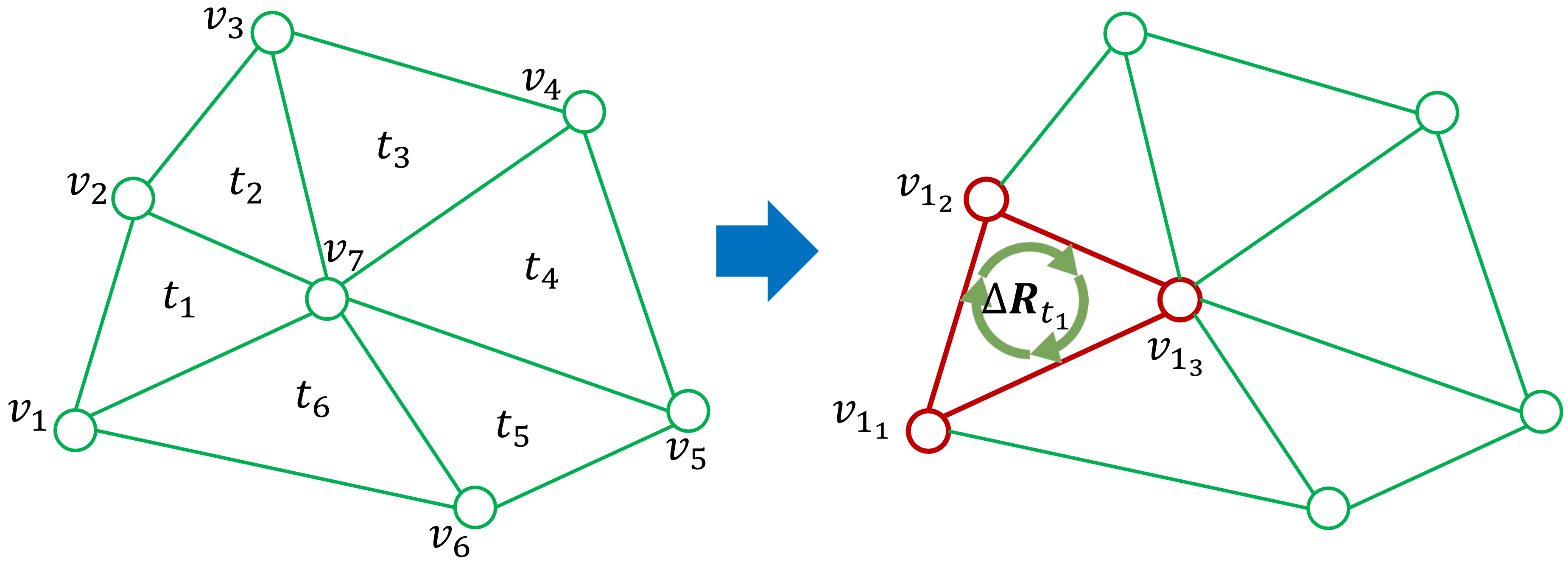
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 方法概述
  - IRA采用与增量式SfM类似的**增量式**参数估计流程
    - 更加精确、鲁棒
  - 旋转平均问题相对于SfM问题待估计的**参数量**更少
    - 更加简单、高效



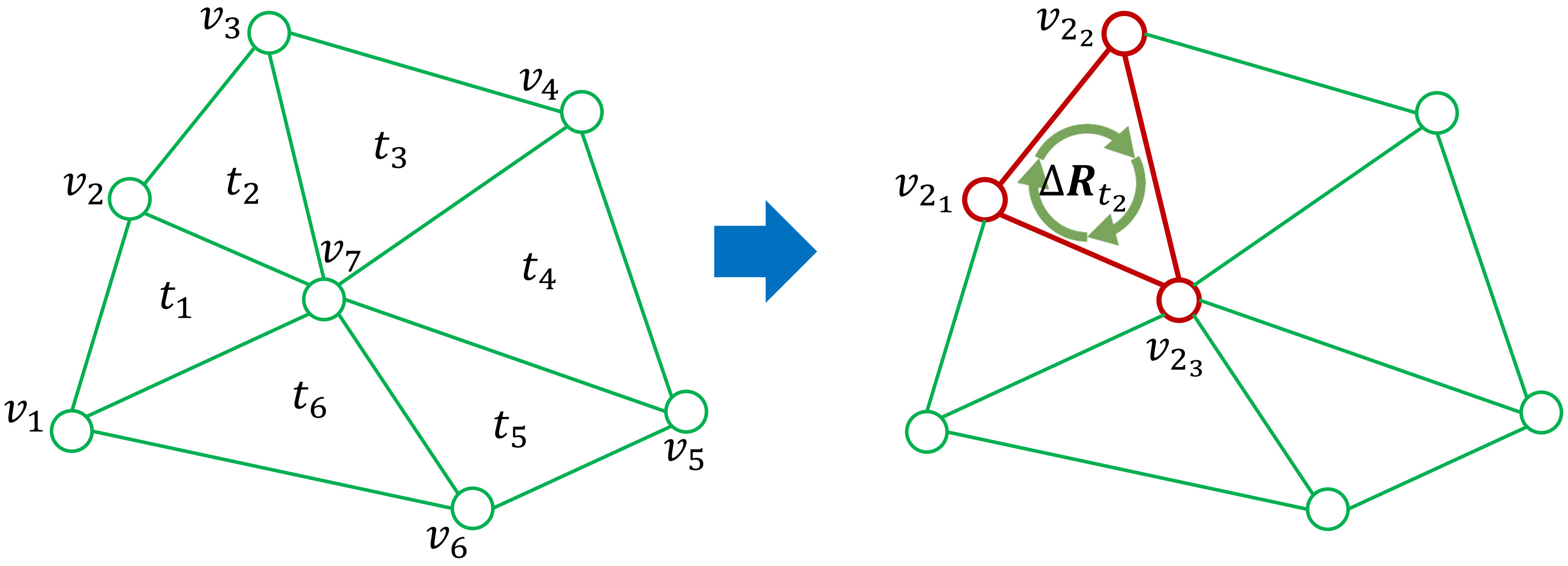
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta \boldsymbol{R}_{t_i} = \boldsymbol{R}_{i_1,i_2} \boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^{\top} \boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$；　$t_i \in \mathcal{T}$；　$v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in t_i$



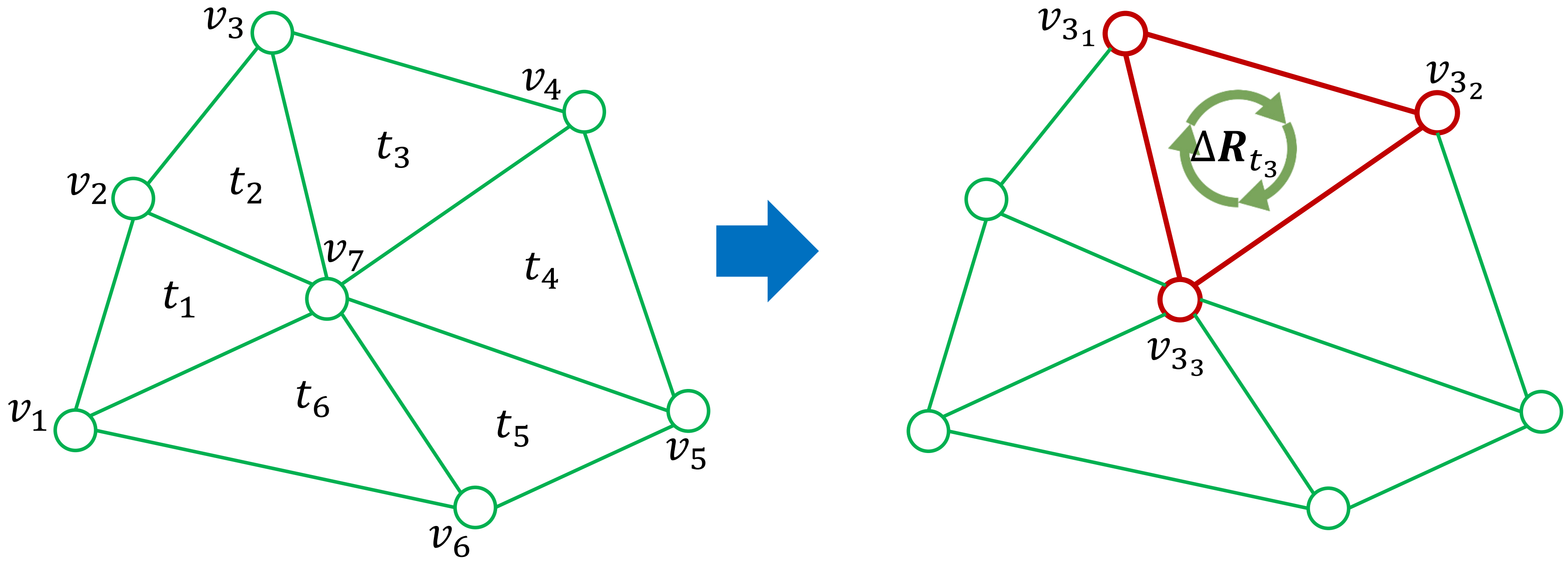
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta \boldsymbol{R}_{t_i} = \boldsymbol{R}_{i_1,i_2} \boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^\top \boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$； $t_i \in \mathcal{T}$； $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in t_i$



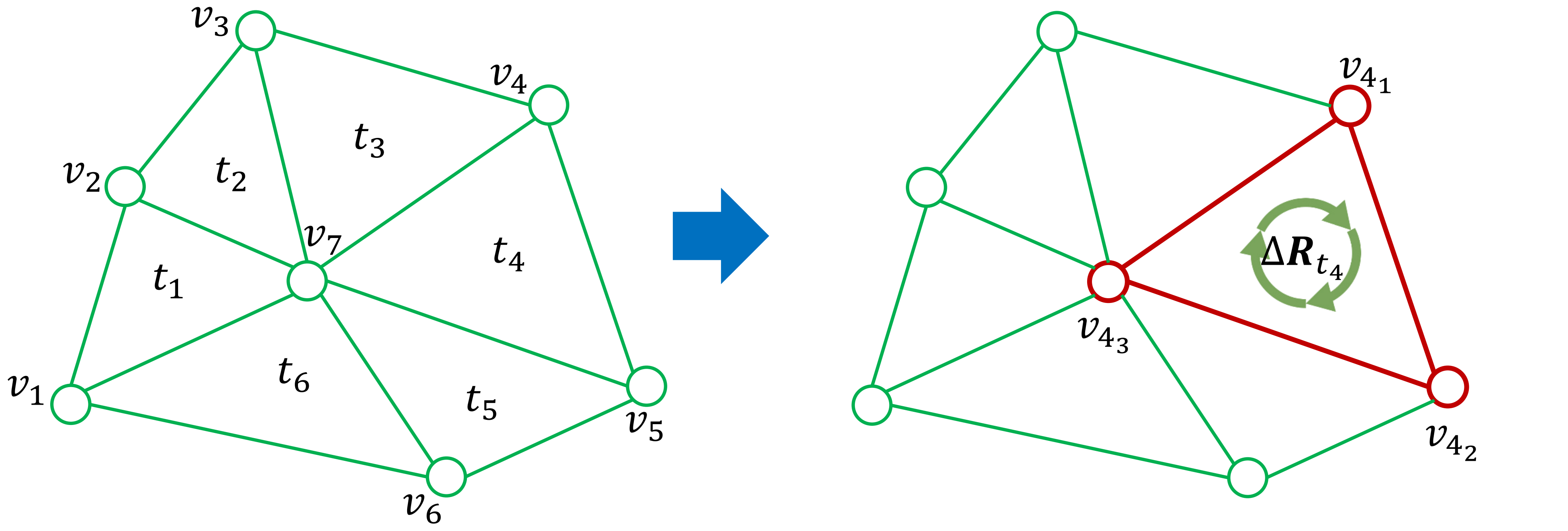
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta\boldsymbol{R}_{t_i} = \boldsymbol{R}_{i_1,i_2}\boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^{\top}\boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$；　$t_i \in \mathcal{T}$；　$v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in t_i$



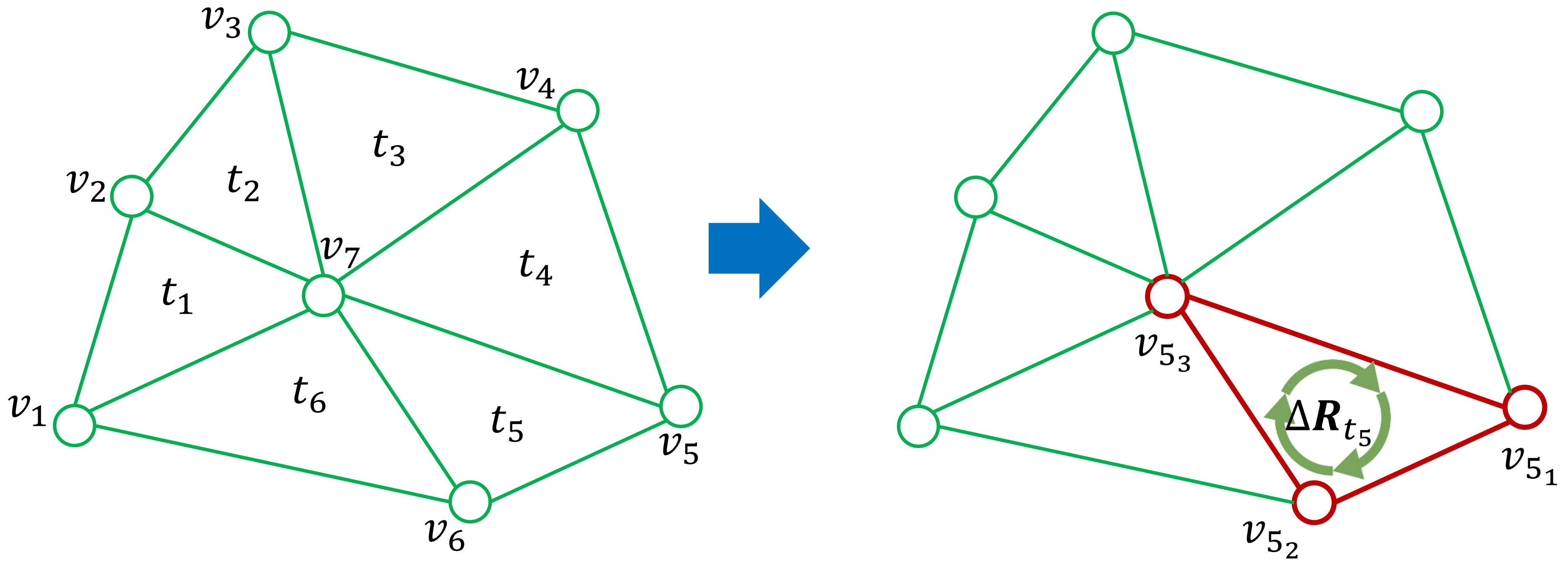
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta \boldsymbol{R}_{t_i} = \boldsymbol{R}_{i_1,i_2} \boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^{\top} \boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$； $t_i \in \mathcal{T}$； $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in t_i$



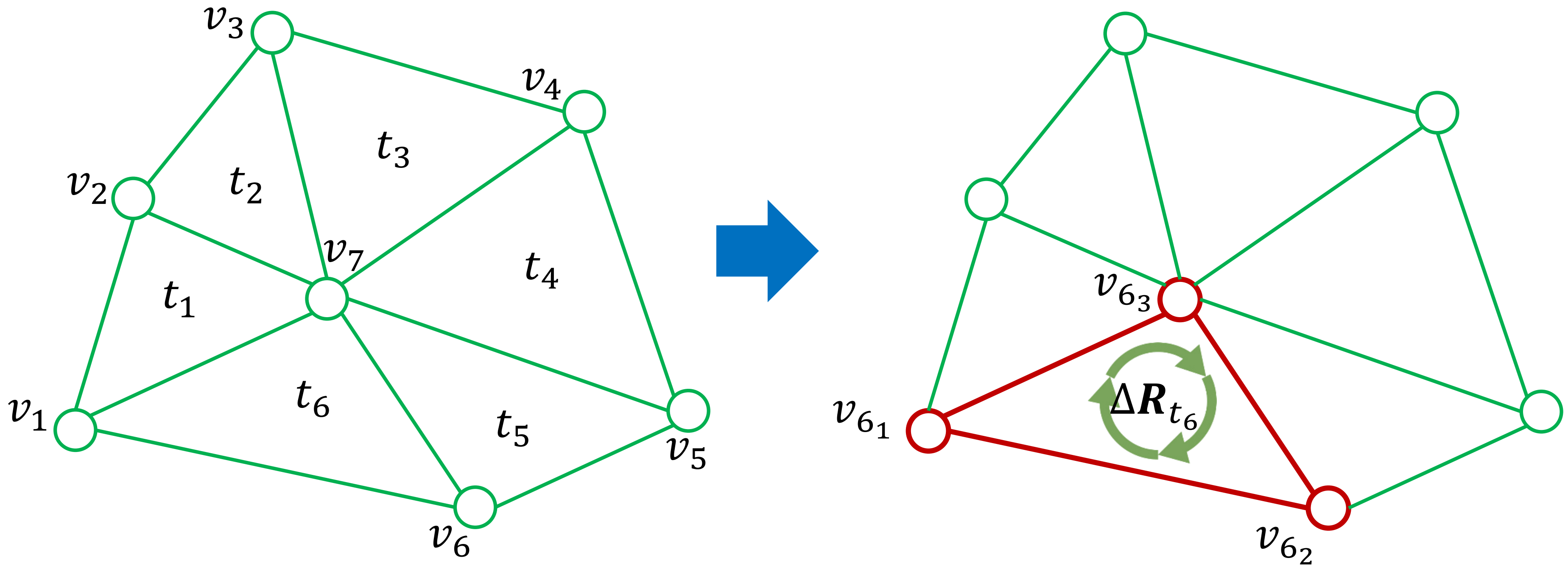
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta \boldsymbol{R}_{t_i} = \boldsymbol{R}_{i_1,i_2} \boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^{\top} \boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$； $t_i \in \mathcal{T}$； $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in t_i$



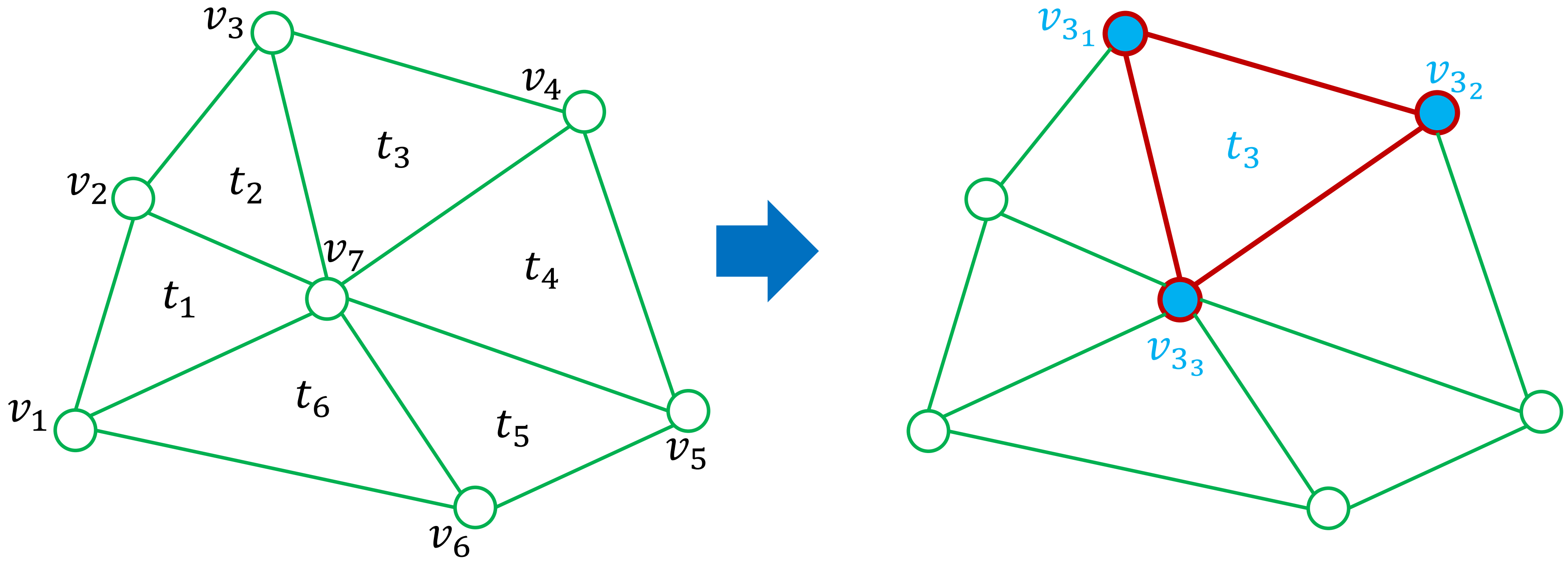
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta \boldsymbol{R}_{t_i} = \boldsymbol{R}_{i_1,i_2}\boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^{\top}\boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$； $t_i \in \mathcal{T}$； $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in t_i$



增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

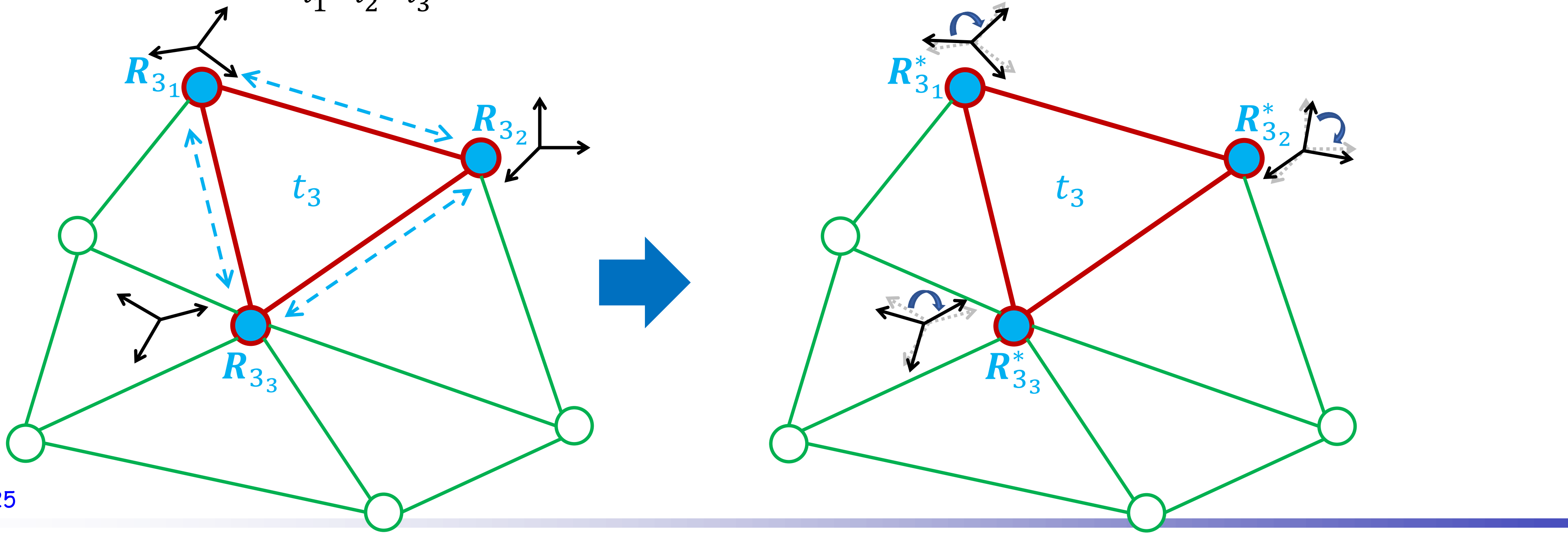
- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta\boldsymbol{R}_{t_i}=\boldsymbol{R}_{i_1,i_2}\boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^{\top}\boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$；　$t_i\in\mathcal{T}$；　$v_{i_1},v_{i_2},v_{i_3}\in t_i$
  - **误差最小化**初始三元组选取：$t_{i^*}=\arg\min\limits_{t_i\in\mathcal{T}} d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{I},\Delta\boldsymbol{R}_{t_i}\right)$



增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

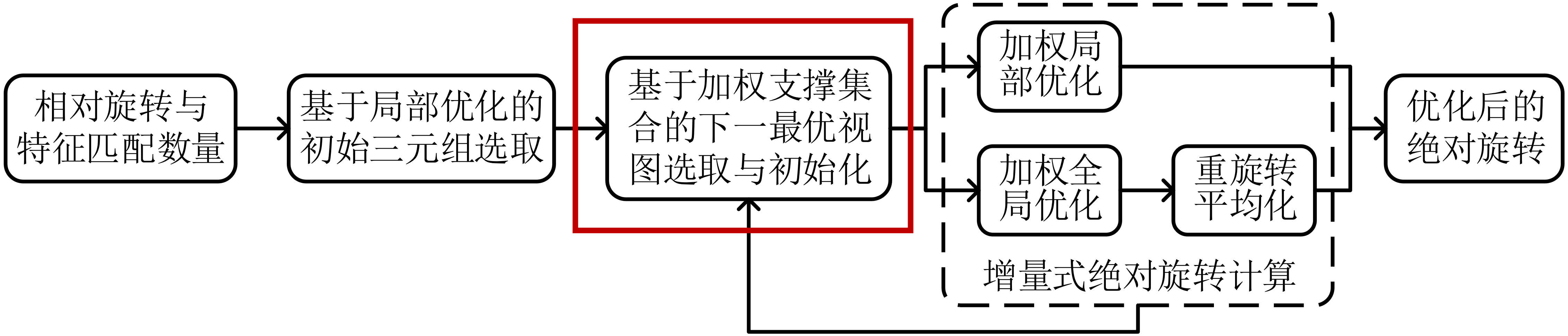
- 初始三元组选取
  - 三元组**循环一致性**误差求解：$\Delta\boldsymbol{R}_{t_i} = \boldsymbol{R}_{i_1,i_2}\boldsymbol{R}_{i_1,i_3}^{\top}\boldsymbol{R}_{i_2,i_3}$； $t_i \in \mathcal{T}$； $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \in t_i$
  - **误差最小化**初始三元组选取：$t_{i^*} = \arg\min_{t_i \in \mathcal{T}} d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{I}, \Delta\boldsymbol{R}_{t_i}\right)$
  - 三元组内绝对旋转**局部优化**：

$$\boldsymbol{R}_{i_1^*}^*, \boldsymbol{R}_{i_2^*}^*, \boldsymbol{R}_{i_3^*}^* = \arg\min_{v_{i_1^*}, v_{i_2^*}, v_{i_3^*} \in t_{i^*}} d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i_1^*,i_2^*}, \boldsymbol{R}_{i_2^*}\boldsymbol{R}_{i_1^*}^{\top}\right) + d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i_1^*,i_3^*}, \boldsymbol{R}_{i_3^*}\boldsymbol{R}_{i_1^*}^{\top}\right) + d_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i_2^*,i_3^*}, \boldsymbol{R}_{i_3^*}\boldsymbol{R}_{i_2^*}^{\top}\right)$$



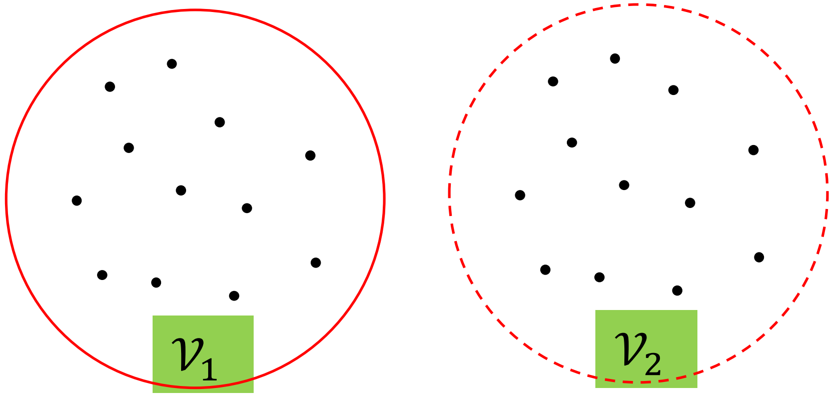
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 方法概述
  - IRA采用与增量式SfM类似的**增量式**参数估计流程
    - 更加精确、鲁棒
  - 旋转平均问题相对于SfM问题待估计的**参数量**更少
    - 更加简单、高效



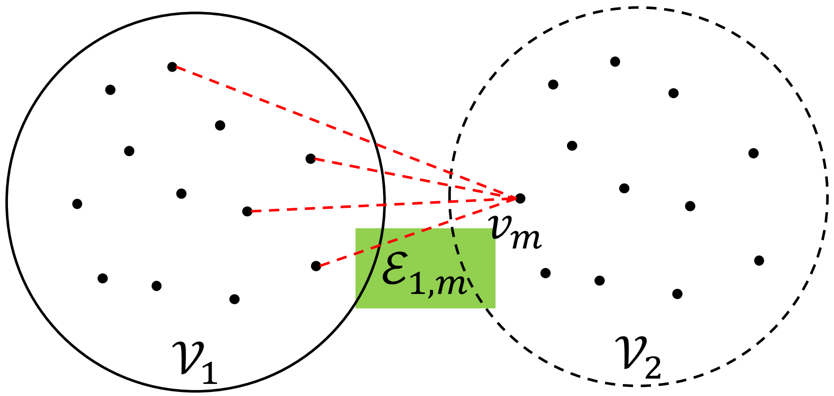
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合



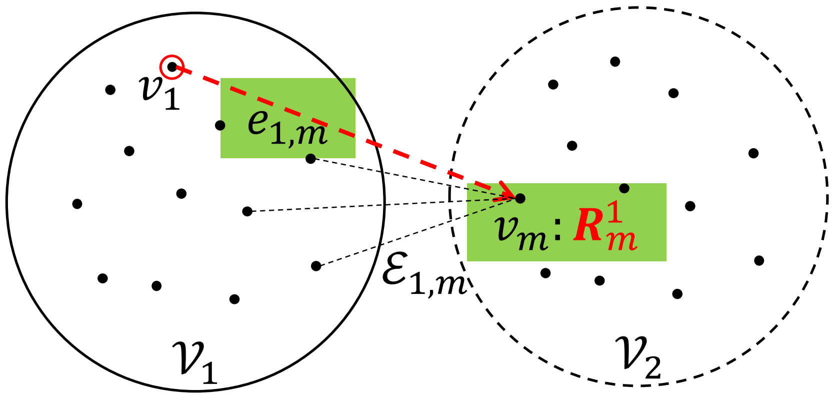
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集



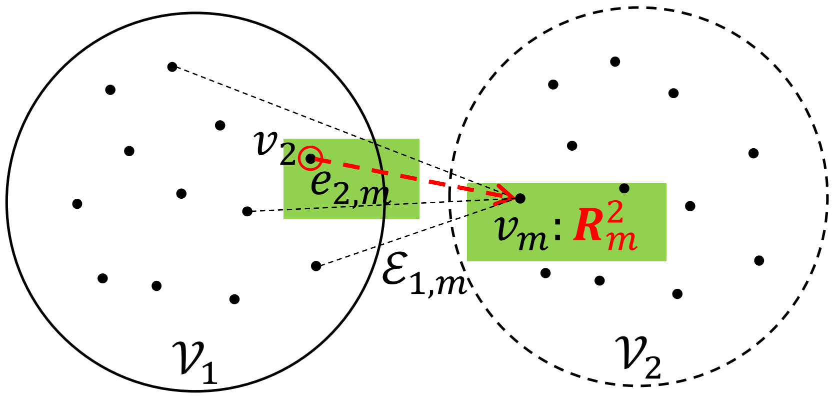
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$



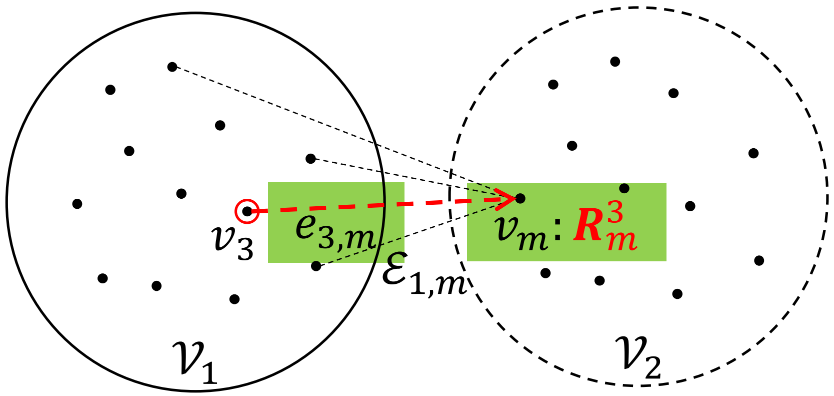
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$



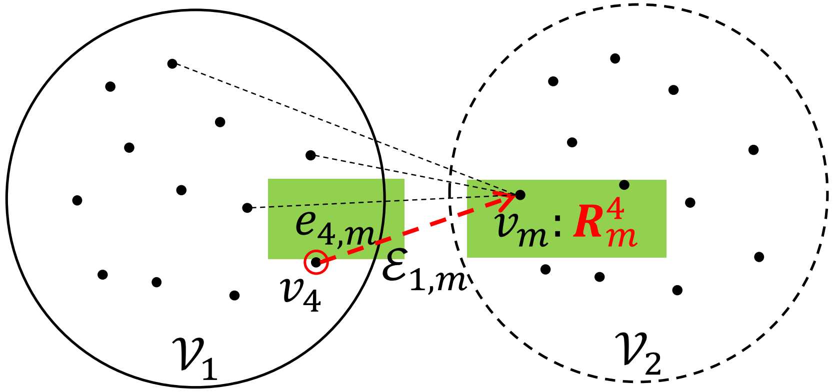
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$



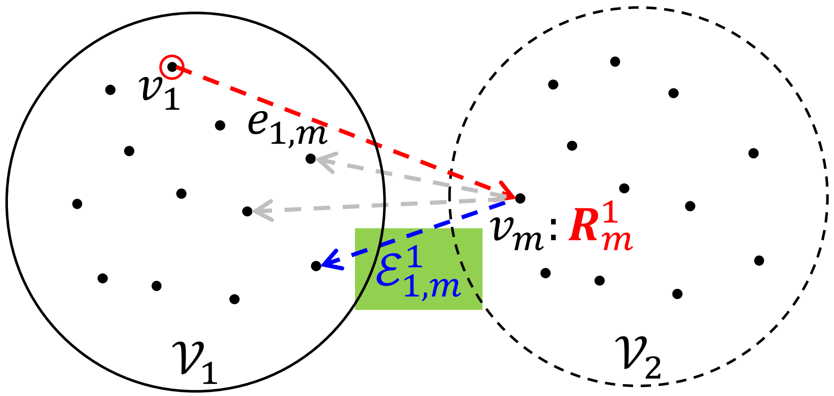
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$



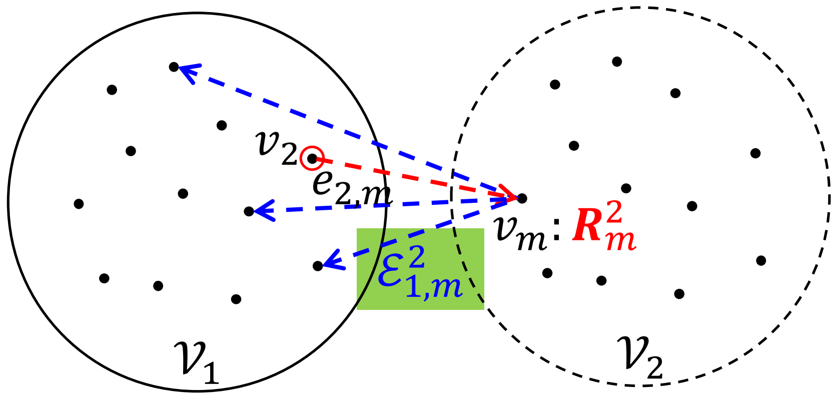
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$
  - 对v_m的每一个预计算绝对旋转$\boldsymbol{R}_m^i$获取支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^i$：$\boldsymbol{R}_{j,m}^i = \boldsymbol{R}_m^i\boldsymbol{R}_j^\top$



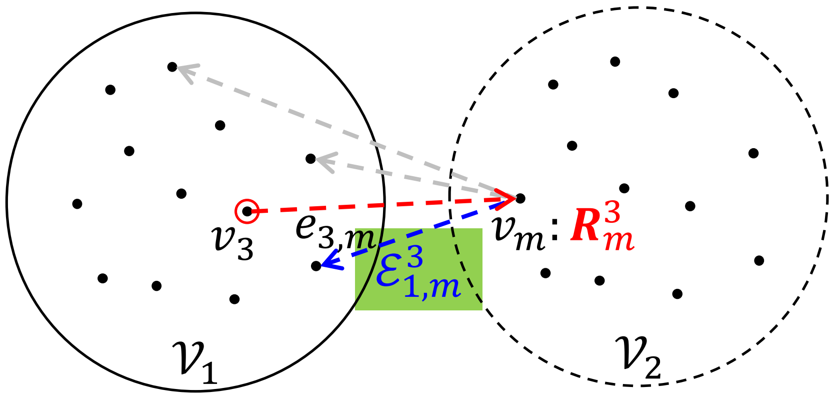
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$
  - 对v_m的每一个预计算绝对旋转$\boldsymbol{R}_m^i$获取支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^i$：$\boldsymbol{R}_{j,m}^i = \boldsymbol{R}_m^i\boldsymbol{R}_j^\top$



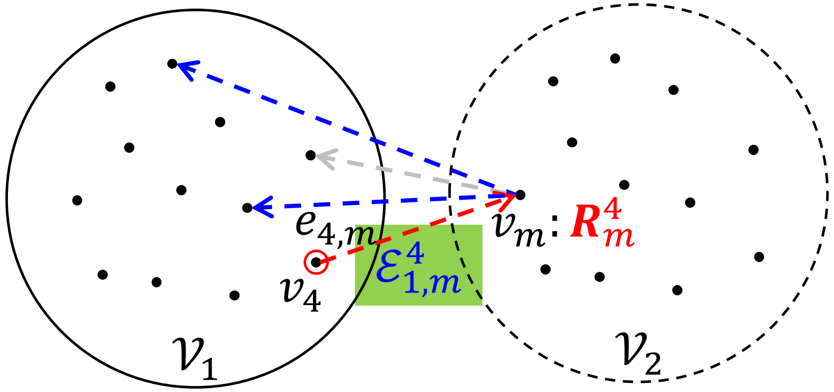
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$
  - 对v_m的每一个预计算绝对旋转$\boldsymbol{R}_m^i$获取支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^i$：$\boldsymbol{R}_{j,m}^i = \boldsymbol{R}_m^i\boldsymbol{R}_j^\top$



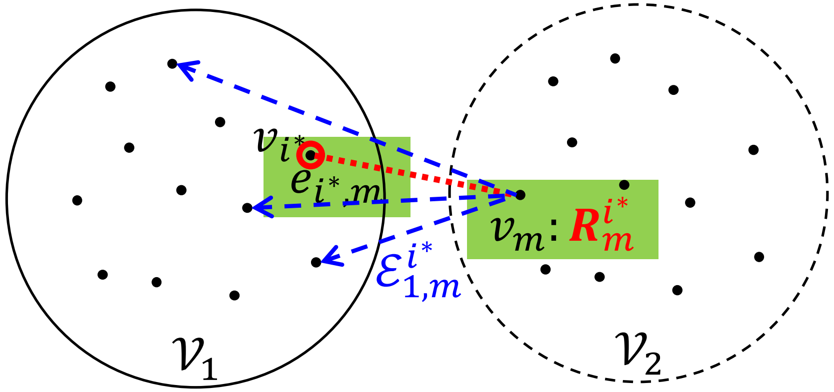
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$
  - 对v_m的每一个预计算绝对旋转$\boldsymbol{R}_m^i$获取支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^i$：$\boldsymbol{R}_{j,m}^i = \boldsymbol{R}_m^i\boldsymbol{R}_j^\top$



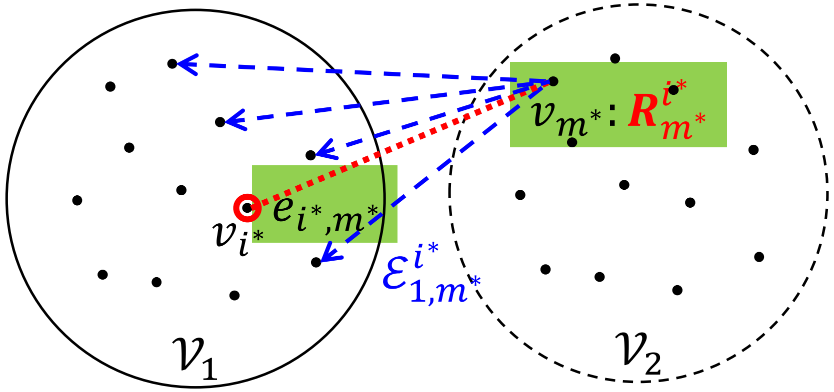
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$
  - 对v_m的每一个预计算绝对旋转$\boldsymbol{R}_m^i$获取支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^i$：$\boldsymbol{R}_{j,m}^i = \boldsymbol{R}_m^i\boldsymbol{R}_j^\top$
  - 最大支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^{i^*}$对应的$\boldsymbol{R}_m^{i^*}$即为v_m的初始化结果



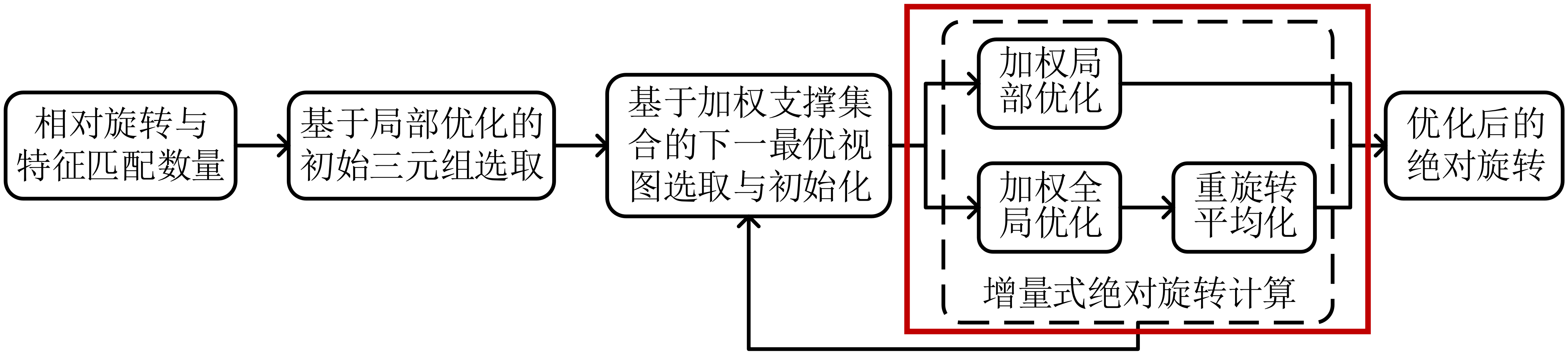
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 下一最优视图（Next Best View, NBV）选取与初始化
  - $\mathcal{V}_1$与$\mathcal{V}_2$：当前已估计与未估计绝对旋转的顶点集合
  - $\mathcal{E}_{1,m}$：$\mathcal{V}_2$中一顶点v_m与$\mathcal{V}_1$中所有顶点之间的边集
  - 对$\mathcal{E}_{1,m}$中的每一条边$e_{i,m}$预计算顶点v_m的绝对旋转：$\boldsymbol{R}_m^i = \boldsymbol{R}_{i,m}\boldsymbol{R}_i$
  - 对v_m的每一个预计算绝对旋转$\boldsymbol{R}_m^i$获取支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^i$：$\boldsymbol{R}^i_{j,m} = \boldsymbol{R}_m^i\boldsymbol{R}_j^{\top}$
  - 最大支撑边集$\mathcal{E}_{1,m}^{i^*}$对应的$\boldsymbol{R}_m^{i^*}$即为v_m的初始化结果
  - 对$\mathcal{V}_2$中各顶点重复上述过程并获取全局最大支撑边集$\mathcal{E}_{1,m^*}^{i^*}$，则$v_{m^*}$与$\boldsymbol{R}_{m^*}^{i^*}$即为**NBV**及其**初始化**结果



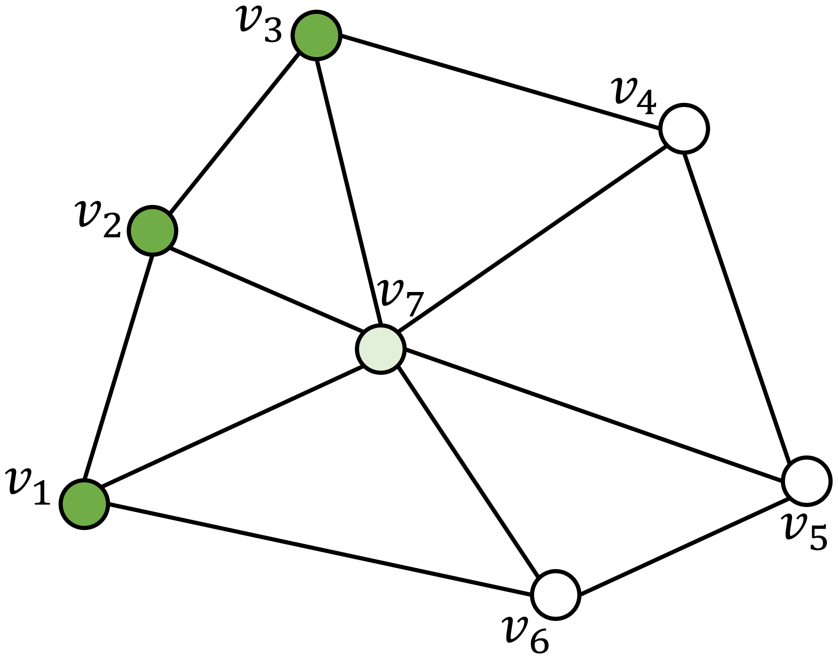
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 方法概述
  - IRA采用与增量式SfM类似的**增量式**参数估计流程
    - 更加精确、鲁棒
  - 旋转平均问题相对于SfM问题待估计的**参数量**更少
    - 更加简单、高效



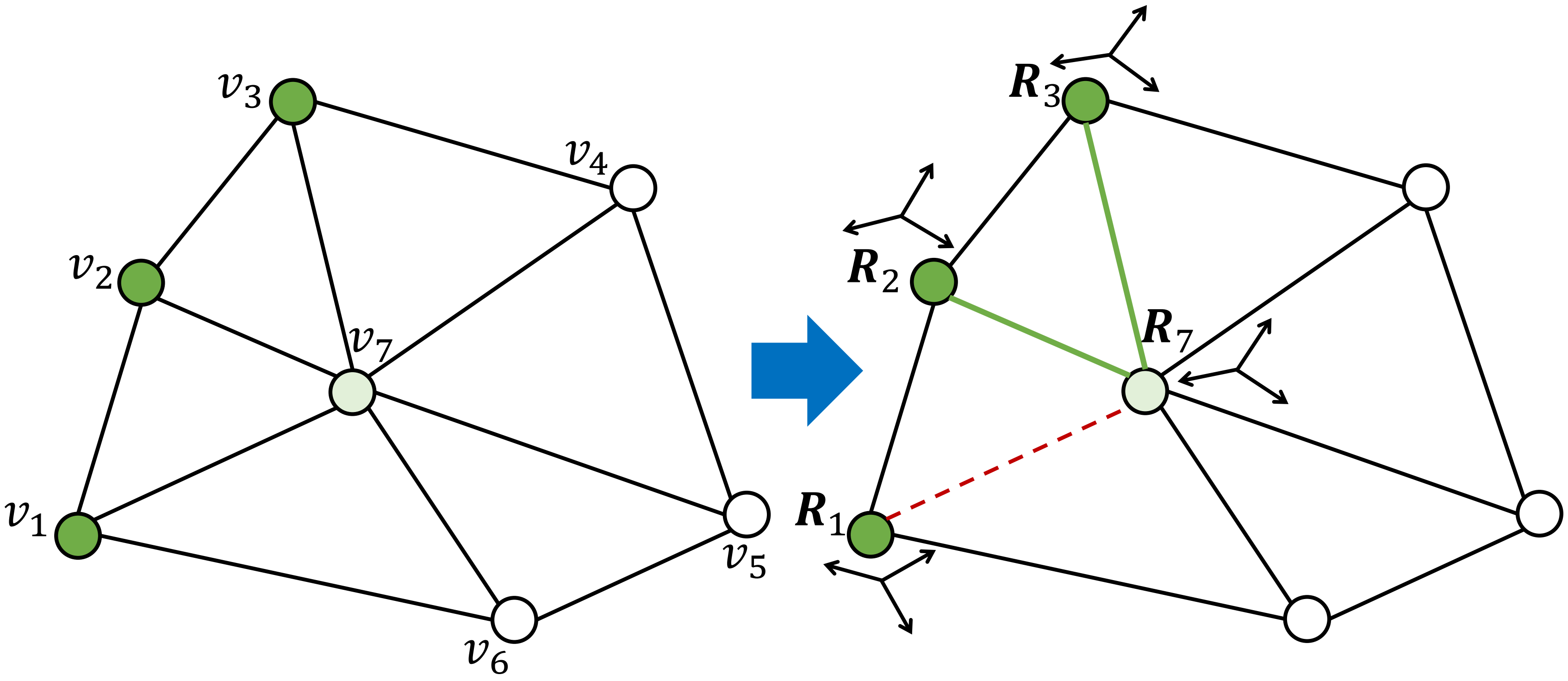
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 增量式绝对旋转计算
  - 局部优化



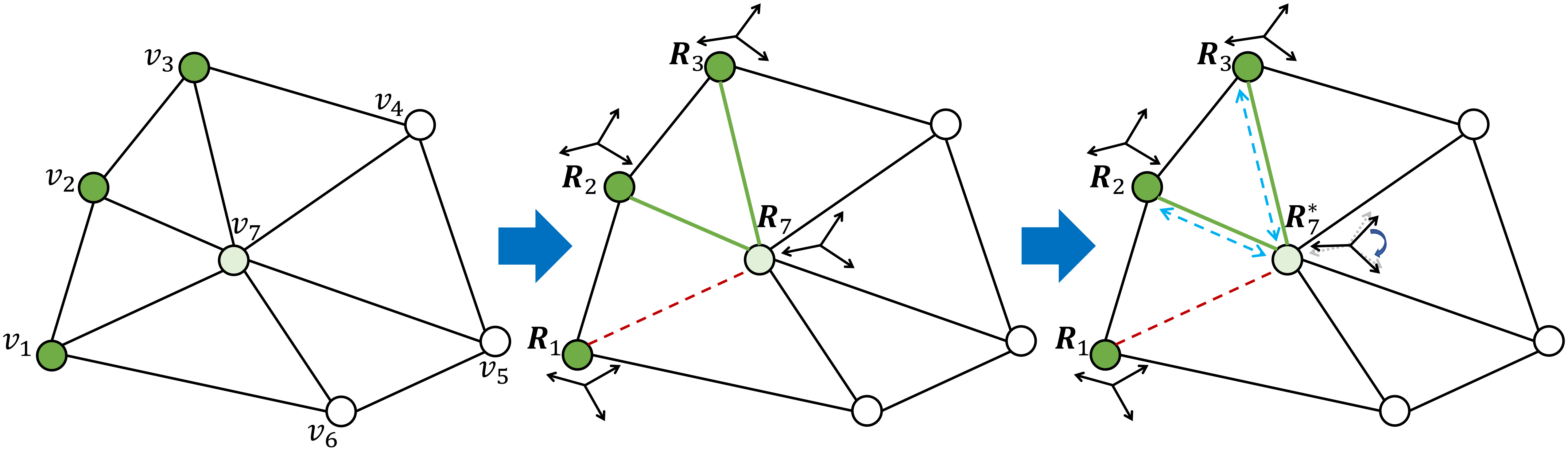
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 增量式绝对旋转计算
  - 局部优化：测量**内值**边集获取



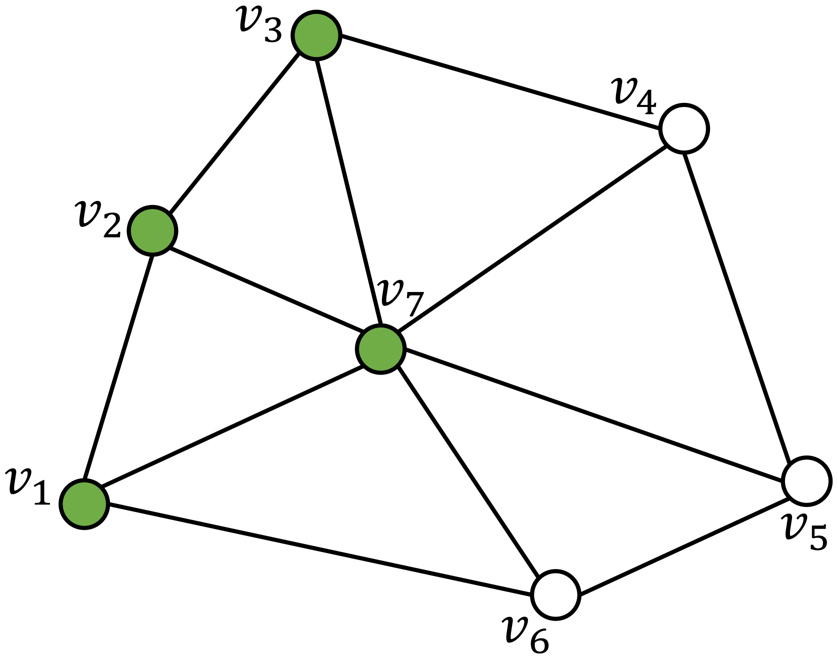
增量式旋转平均（Incremental Rotation Averaging, IRA）

- 增量式绝对旋转计算
  - 局部优化：测量**内值**边集获取 + **局部**绝对旋转优化



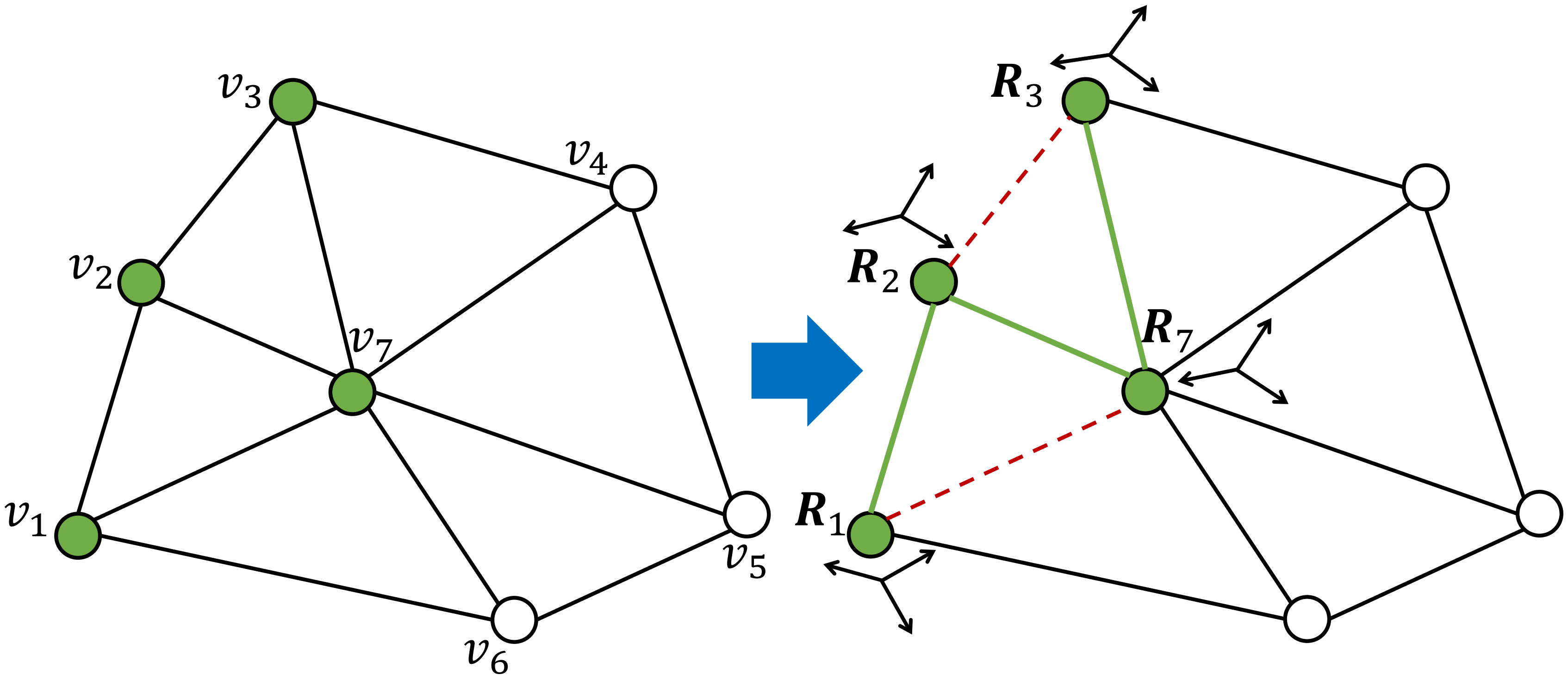
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 增量式绝对旋转计算
  - 全局优化



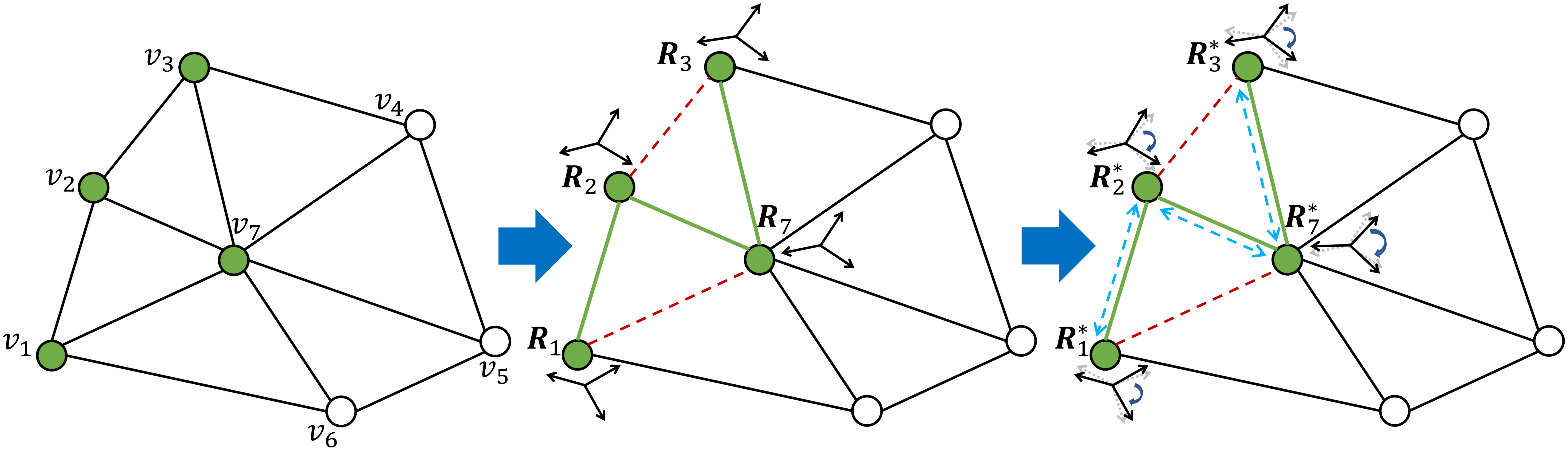
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 增量式绝对旋转计算
  - 全局优化：测量**内值**边集获取



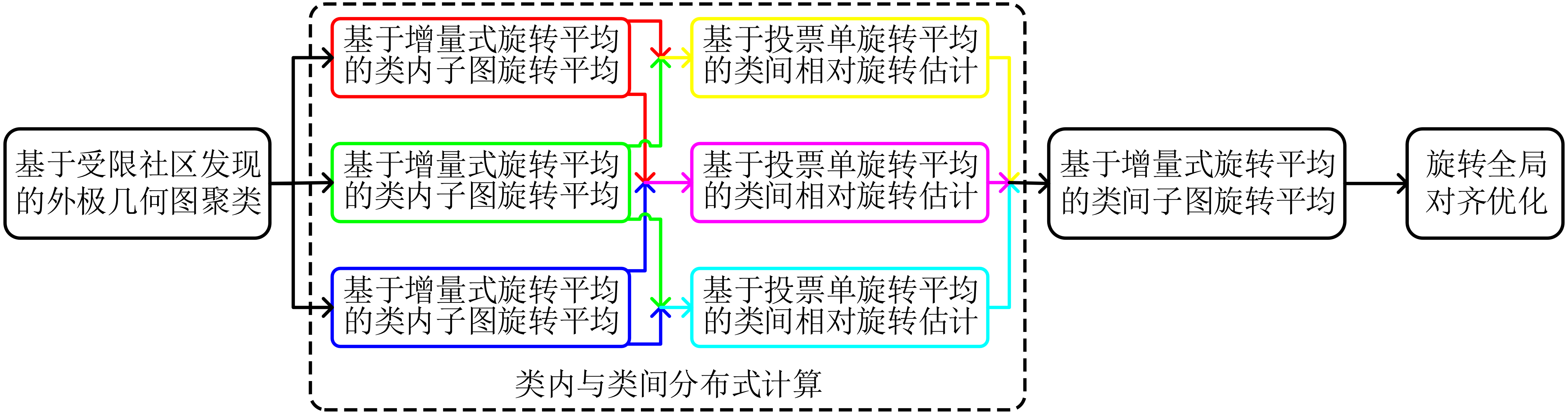
增量式旋转平均（**Incremental** Rotation Averaging, IRA）

- 增量式绝对旋转计算
  - 全局优化：测量**内值**边集获取 + **全局**绝对旋转优化



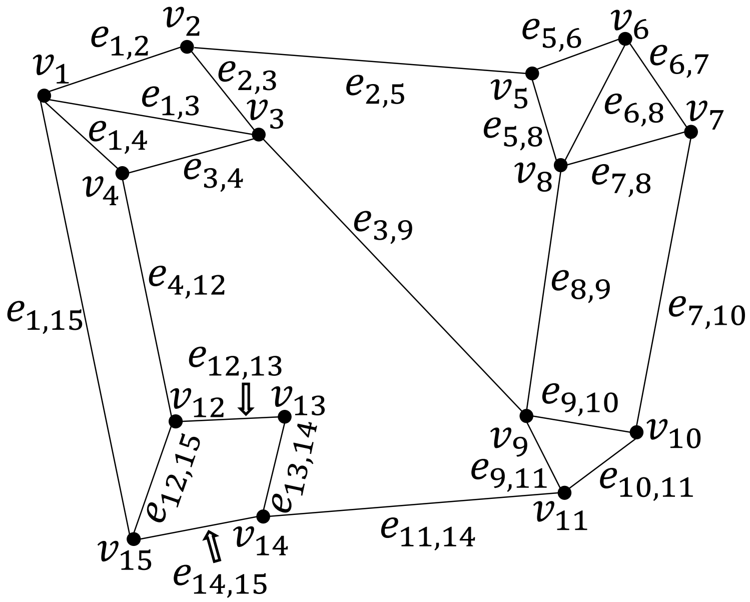
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- 层级增量式旋转平均（Hierarchical Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 解决**IRA**因其固有的增量式参数估计流程在面向大规模旋转平均时的**累积误差**与**计算效率**问题



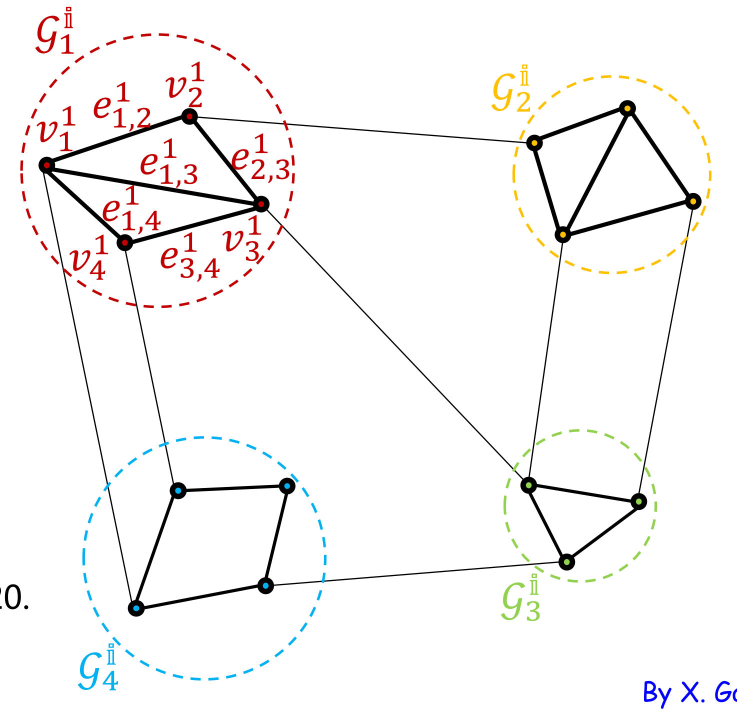
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图：
    - $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}, \mathcal{V} = \{v_i\}, \mathcal{E} = \{e_{i,j}\}$



纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

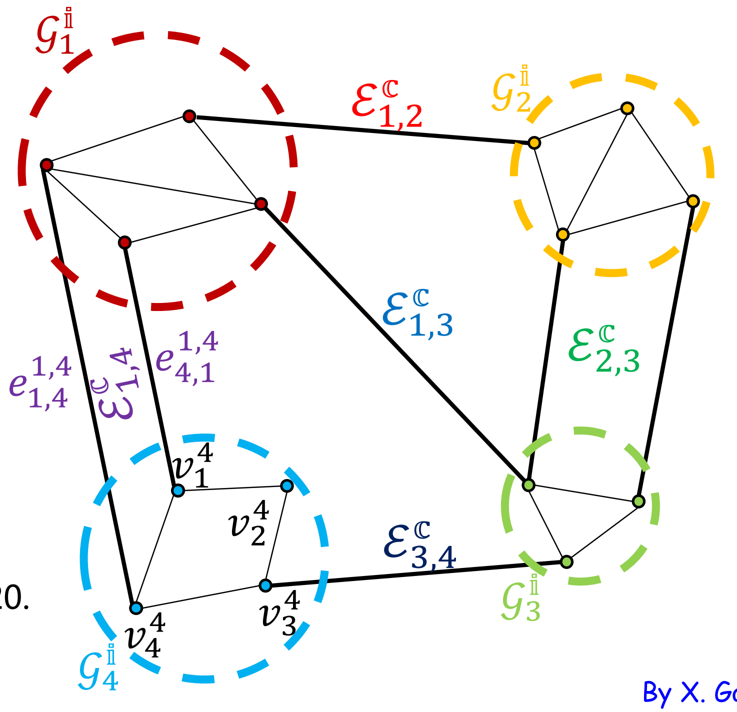
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类：
    - 类内子图：$\left\{\mathcal{G}_p^{\mathrm{ii}} = \{\mathcal{V}_p^{\mathrm{ii}}, \mathcal{E}_p^{\mathrm{ii}}\}\right\}, \mathcal{V}_p^{\mathrm{ii}} = \{v_m^p\}, \mathcal{E}_p^{\mathrm{ii}} = \{e_{m,n}^p\}$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging)

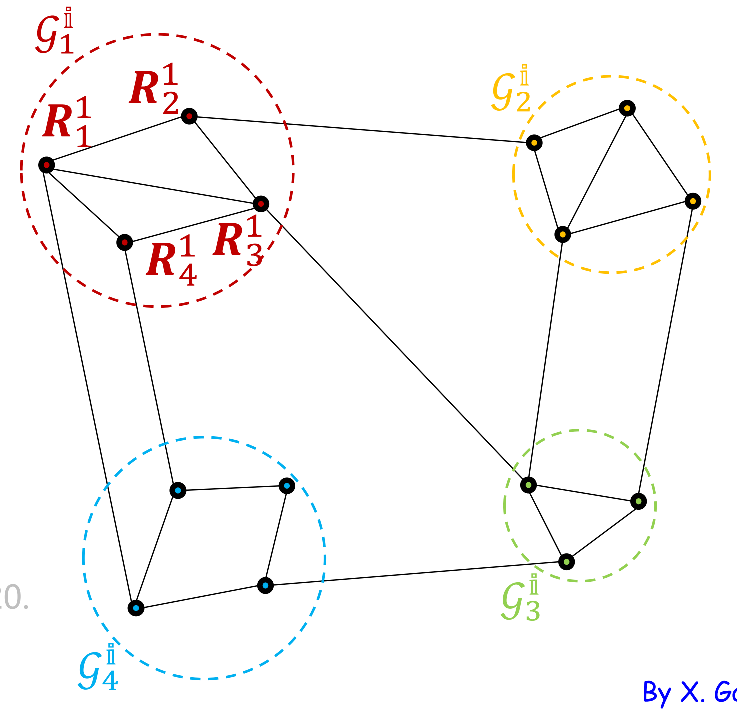
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++)
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类：
    - 类内子图：$\left\{\mathcal{G}_p^{\mathbb{i}} = \{\mathcal{V}_p^{\mathbb{i}}, \mathcal{E}_p^{\mathbb{i}}\}\right\}, \mathcal{V}_p^{\mathbb{i}} = \{v_m^p\}, \mathcal{E}_p^{\mathbb{i}} = \{e_{m,n}^p\}$
    - 类间子图：$\mathcal{G}^{\mathbb{C}} = \{\mathcal{V}^{\mathbb{C}}, \mathcal{E}^{\mathbb{C}}\}, \mathcal{V}^{\mathbb{C}} = \{\mathcal{G}_p^{\mathbb{i}}\}, \mathcal{E}^{\mathbb{C}} = \{\mathcal{E}_{p,q}^{\mathbb{C}}\} = \left\{\{e_{m,n}^{p,q}\}\right\}$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

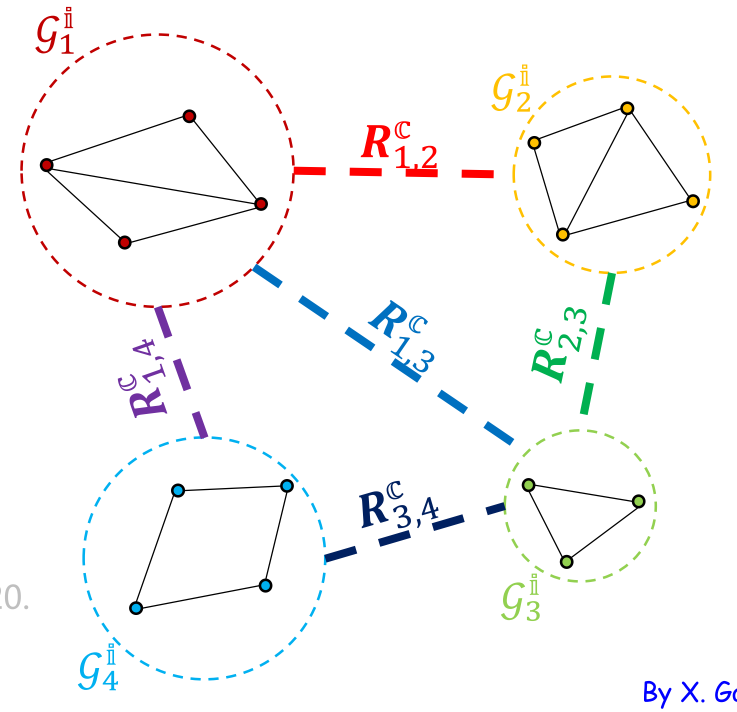
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类
  - 基于IRA的类内旋转平均：
    - $\left\{\boldsymbol{R}_{m,n}^{p} \middle| e_{m,n}^{p} \in \mathcal{E}_{p}^{\mathbb{i}}\right\} \Rightarrow \left\{\boldsymbol{R}_{m}^{p} \middle| v_{m}^{p} \in \mathcal{V}_{p}^{\mathbb{i}}\right\}$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

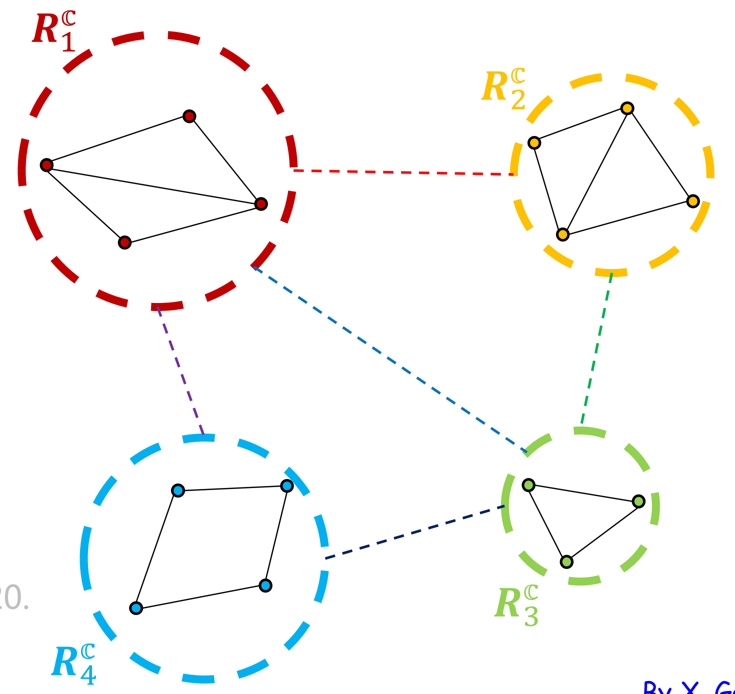
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类
  - 基于**IRA**的类内旋转平均
  - 基于单旋转平均[2]（Single Rotation Averaging, SRA）的类间相对旋转估计：
    - $\left\{\boldsymbol{R}_{m,n}^{p,q} \middle| e_{m,n}^{p,q} \in \mathcal{E}_{p,q}\right\} \Rightarrow \left\{\boldsymbol{R}_{p,q}^{\mathbb{C}} \middle| \mathcal{E}_{p,q}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{C}}\right\}$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

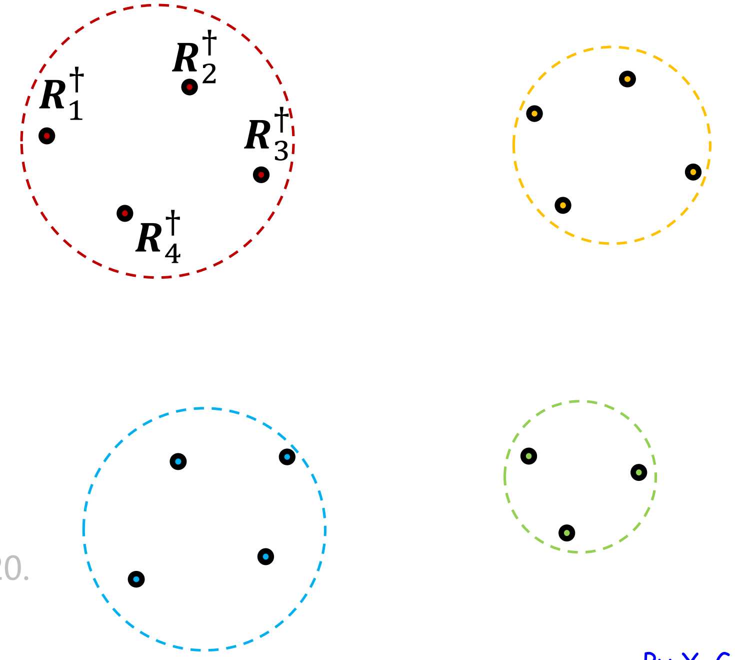
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类
  - 基于**IRA**的类内旋转平均
  - 基于单旋转平均[2]（Single Rotation Averaging, SRA）的类间相对旋转估计
  - 基于**IRA**的类间旋转平均：
    - $\left\{\boldsymbol{R}_{p,q}^{\mathbb{C}} \middle| \mathcal{E}_{p,q}^{\mathbb{C}} \in \mathcal{E}^{\mathbb{C}}\right\} \Rightarrow \left\{\boldsymbol{R}_{p}^{\mathbb{C}} \middle| \mathcal{G}_{p}^{\mathbb{i}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{C}}\right\}$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

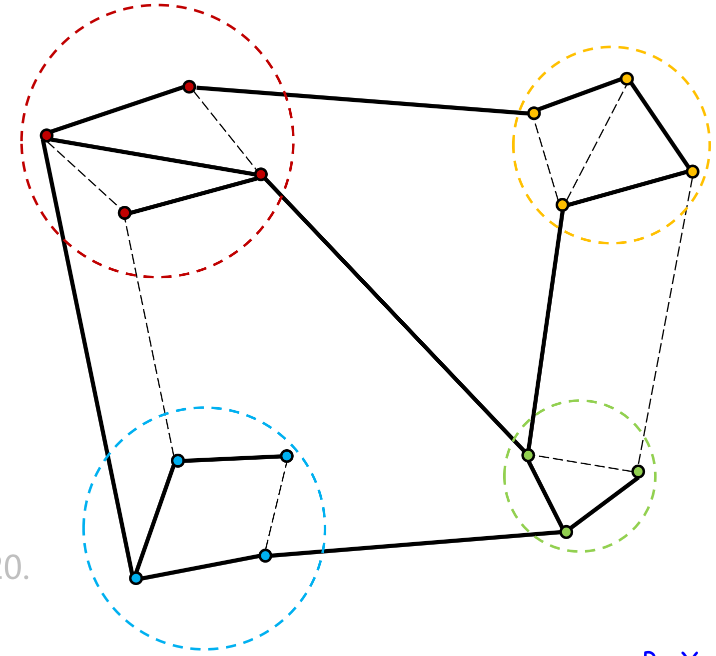
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类
  - 基于**IRA**的类内旋转平均
  - 基于单旋转平均[2]（Single Rotation Averaging, SRA）的类间相对旋转估计
  - 基于**IRA**的类间旋转平均
  - 绝对旋转全局对齐与优化：
    - 全局对齐：$\boldsymbol{R}_i^{\dagger} = \boldsymbol{R}_m^{p}\boldsymbol{R}_p^{\mathbb{C}}$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

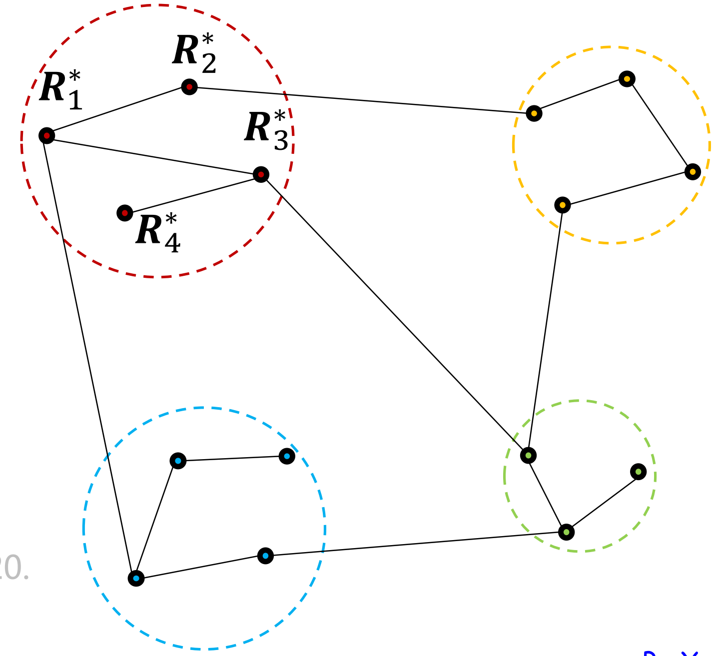
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类
  - 基于**IRA**的类内旋转平均
  - 基于单旋转平均[2]（Single Rotation Averaging, SRA）的类间相对旋转估计
  - 基于**IRA**的类间旋转平均
  - 绝对旋转全局对齐与优化：
    - 全局对齐：$\boldsymbol{R}_i^{\dagger} = \boldsymbol{R}_m^{p} \boldsymbol{R}_p^{\mathbb{C}}$
    - 内值计算：$\mathcal{E}^{\mathbb{I}} = \left\{ d_{\theta}^{\boldsymbol{R}} \left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j^{\dagger} \boldsymbol{R}_i^{\dagger^{\top}} \right) < \theta_{th}^{\boldsymbol{R}} \right\} \text{ for } v_i, v_j \in \mathcal{V}, e_{i,j} \in \mathcal{E}$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

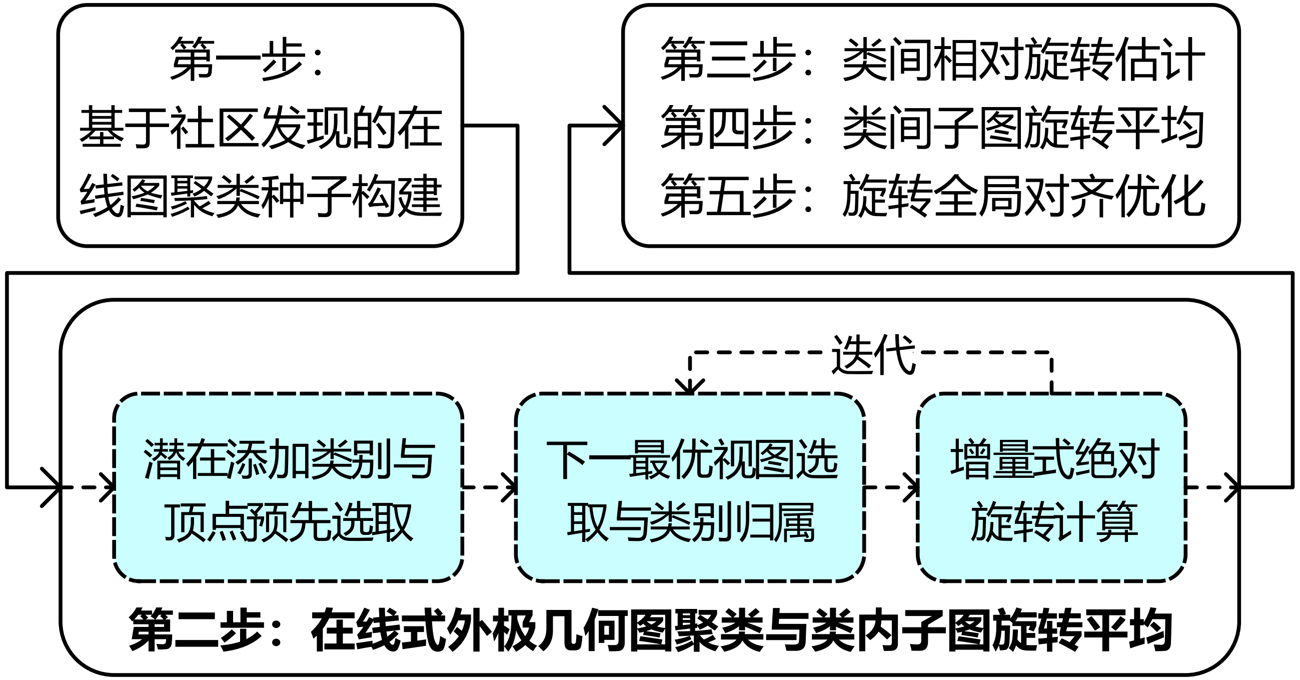
- **层级**增量式旋转平均（**Hierarchical** Incremental Rotation Averaging, IRA++）
  - 原始外极几何图
  - 基于社区发现[1]（Community Detection）的外极几何图聚类
  - 基于**IRA**的类内旋转平均
  - 基于单旋转平均[2]（Single Rotation Averaging, SRA）的类间相对旋转估计
  - 基于**IRA**的类间旋转平均
  - 绝对旋转全局对齐与优化：
    - 全局对齐：$\boldsymbol{R}_i^{\dagger}=\boldsymbol{R}_m^{p}\boldsymbol{R}_p^{\mathbb{C}}$
    - 内值计算：$\mathcal{E}^{\mathbb{I}}=\left\{d_\theta^{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j},\boldsymbol{R}_j^{\dagger}\boldsymbol{R}_i^{\dagger^\top}\right)<\theta_{th}^{\boldsymbol{R}}\right\}\ \text{for}\ v_i,v_j\in\mathcal{V},e_{i,j}\in\mathcal{E}$
    - 全局优化：$\{\boldsymbol{R}_i^*\}=\arg\min\sum_{\substack{v_i,v_j\in\mathcal{V}\\ e_{i,j}^{\mathbb{I}}\in\mathcal{E}^{\mathbb{I}}}} d_\theta^{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}^{\mathbb{I}},\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i^\top\right)^2$



[1] L. Zhou, et al. Stochastic Bundle Adjustment for Efficient and Scalable 3D Reconstruction[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[2] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.

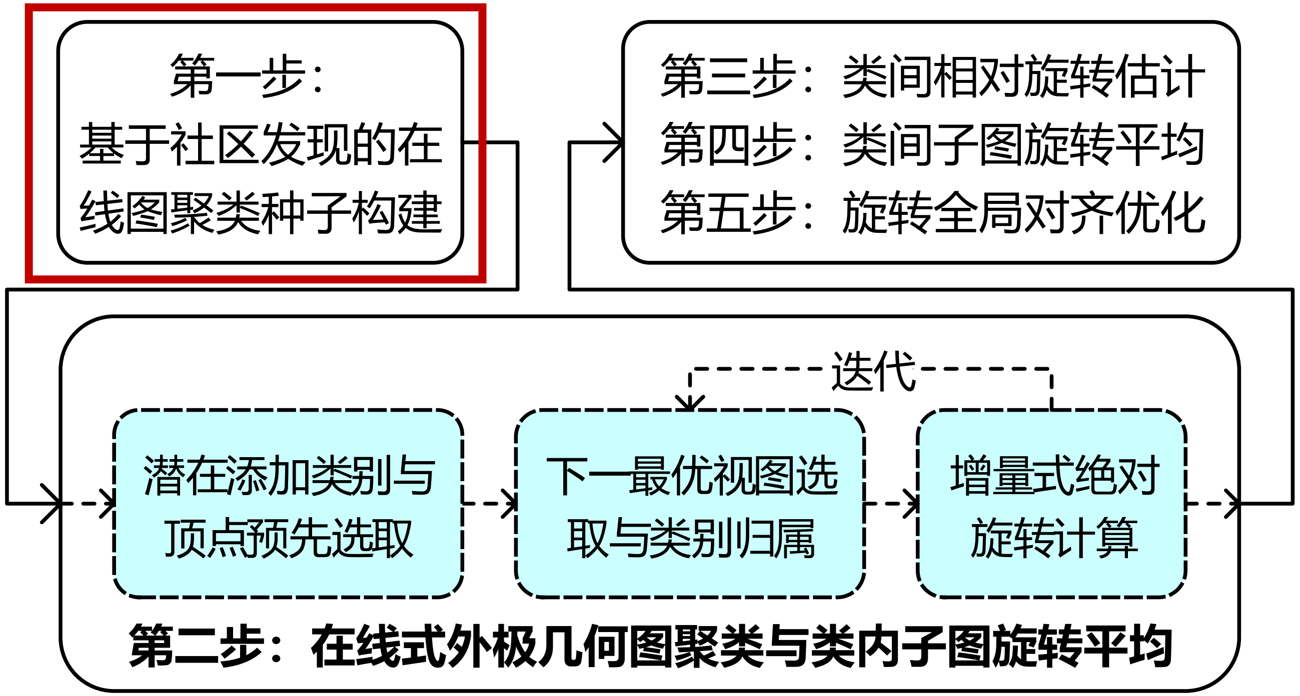
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **在线**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA **on the Fly**, IRAv3）
  - 解决**IRA++**中基于社区发现的聚类方式所存在的**预先确定**与**任务无关**问题



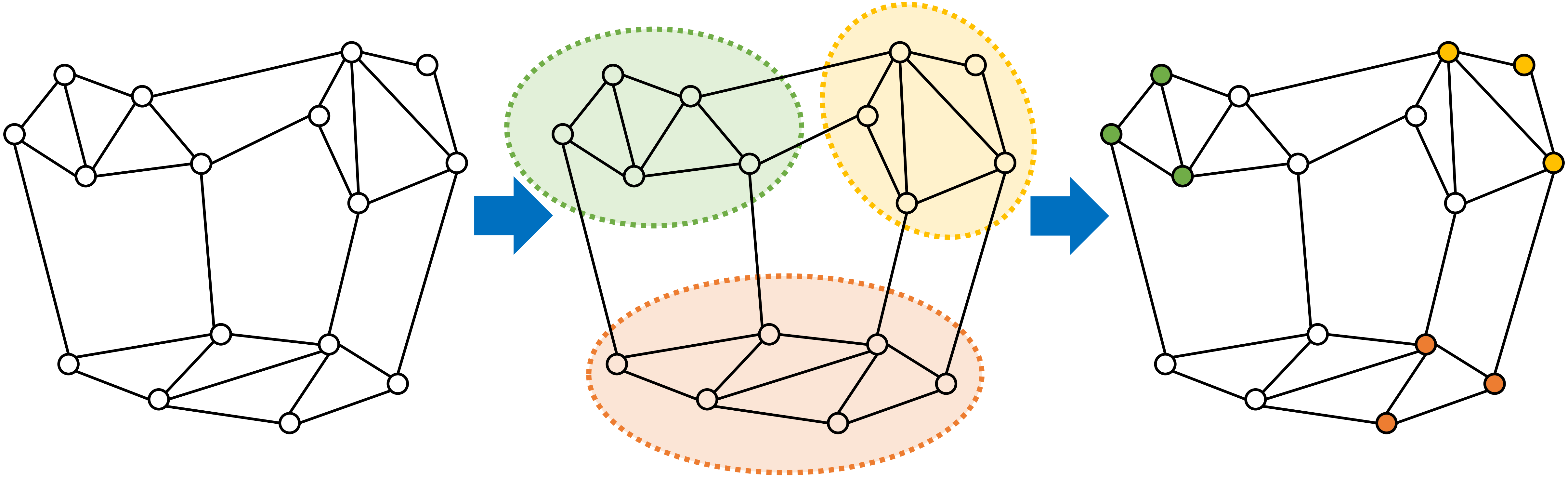
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **在线**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA **on the Fly**, IRAv3）
  - 基于社区发现的**在线聚类种子**构建



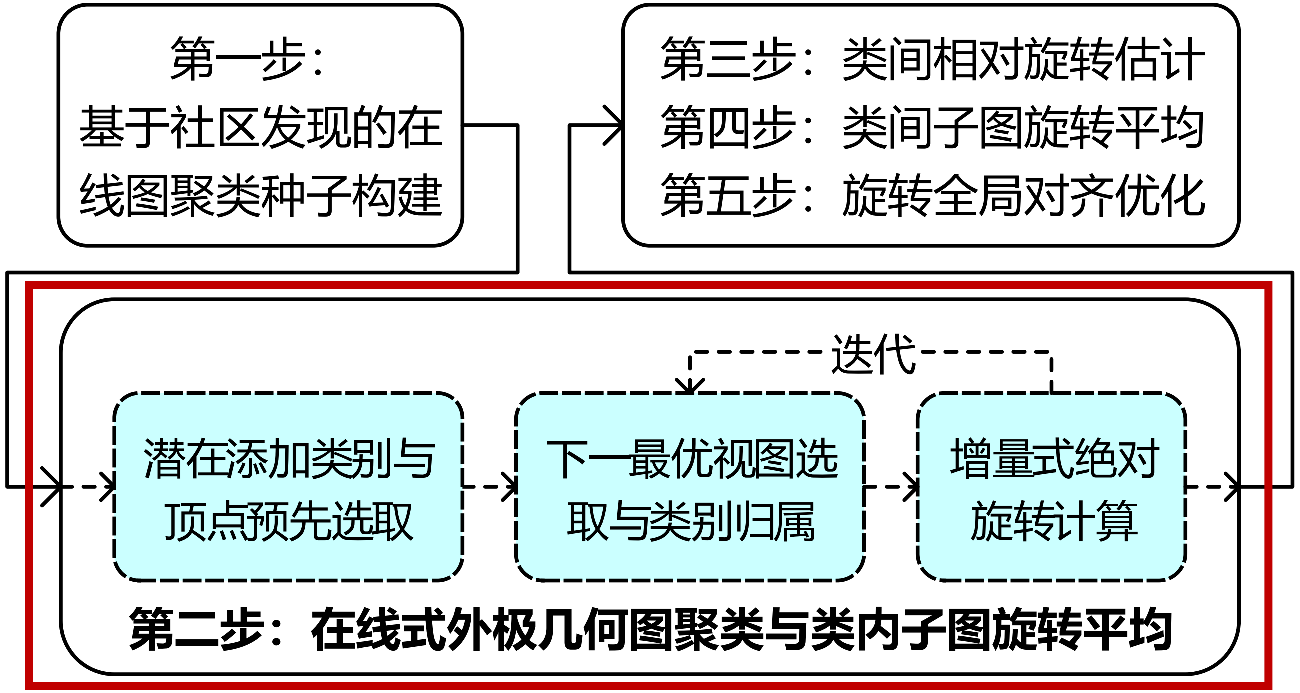
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **在线**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA **on the Fly**, IRAv3）
  - 基于社区发现的**在线聚类种子**构建



纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

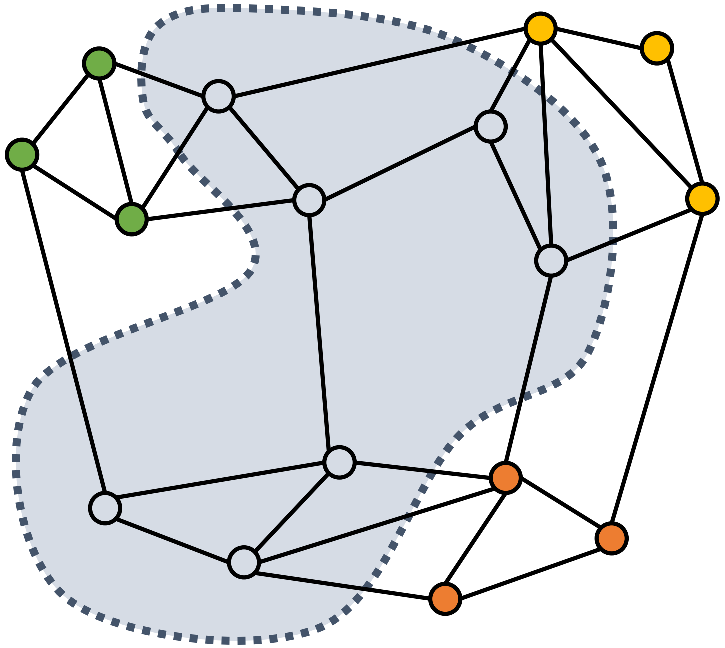
- **在线**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA **on the Fly**, IRAv3）
  - **在线**外极几何图聚类与**增量**式子图旋转平均

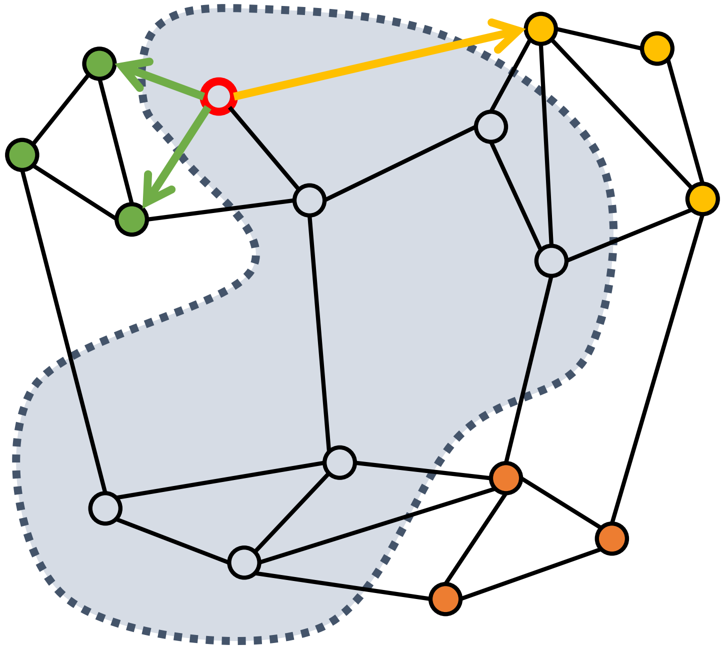


 By X. Gao

纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

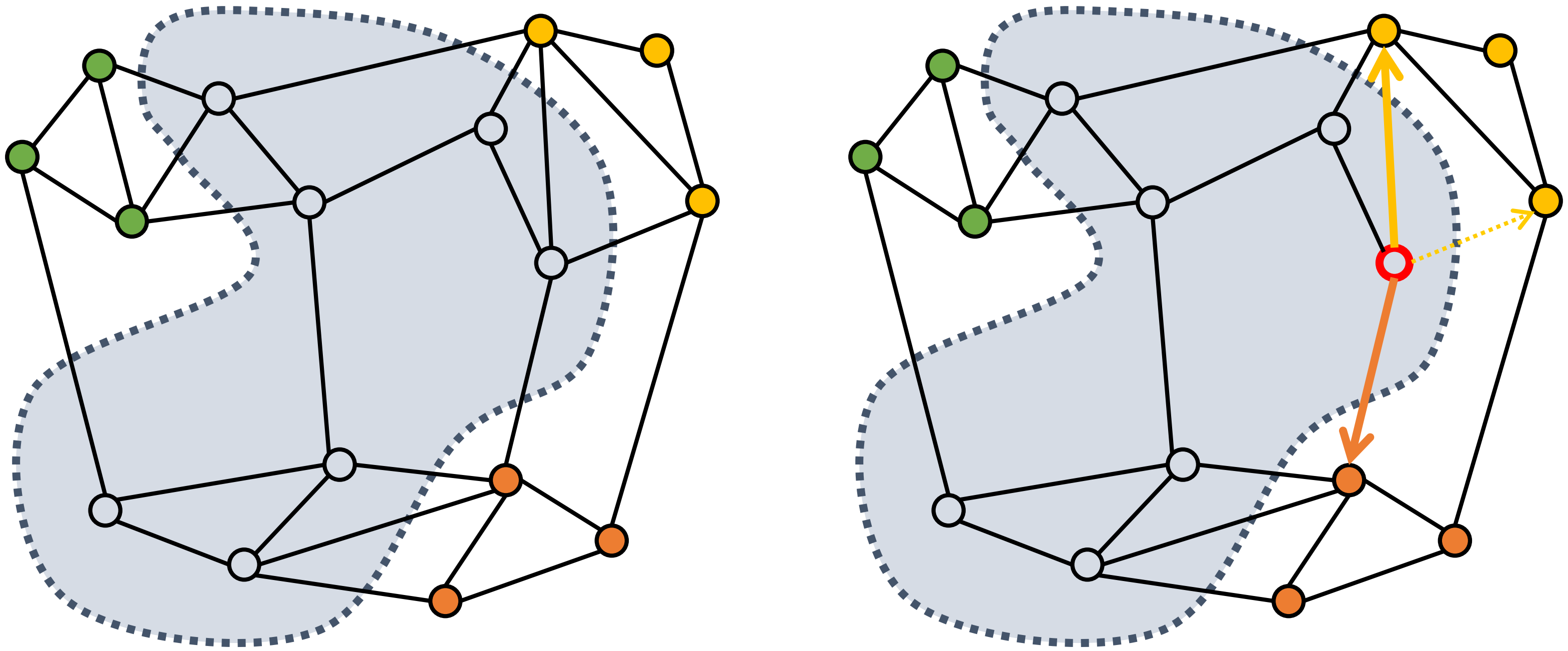
- **在线**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA **on the Fly**, IRAv3）
  - **在线**外极几何图聚类与**增量**式子图旋转平均





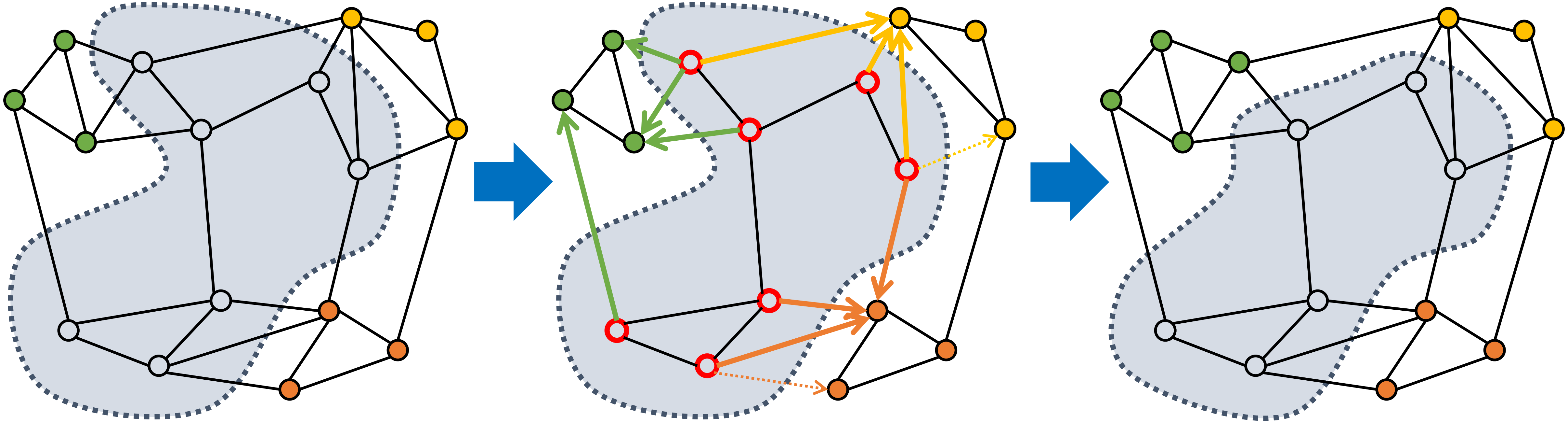
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **在线**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA **on the Fly**, IRAv3）
  - **在线**外极几何图聚类与**增量**式子图旋转平均



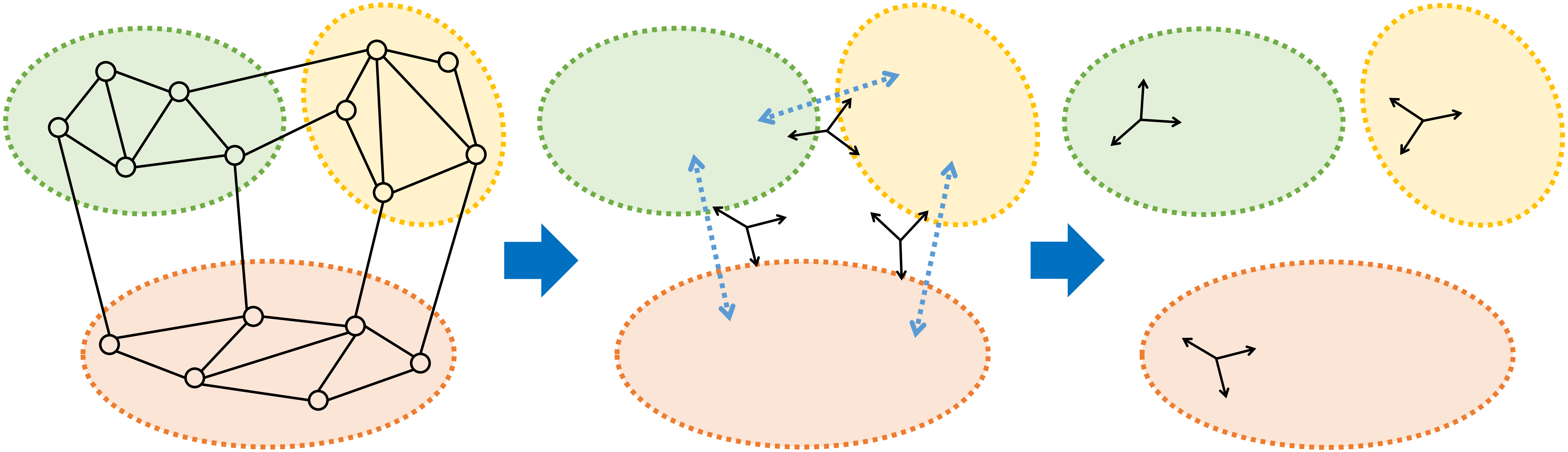
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **在线**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA **on the Fly**, IRAv3）
  - **在线**外极几何图聚类与**增量**式子图旋转平均



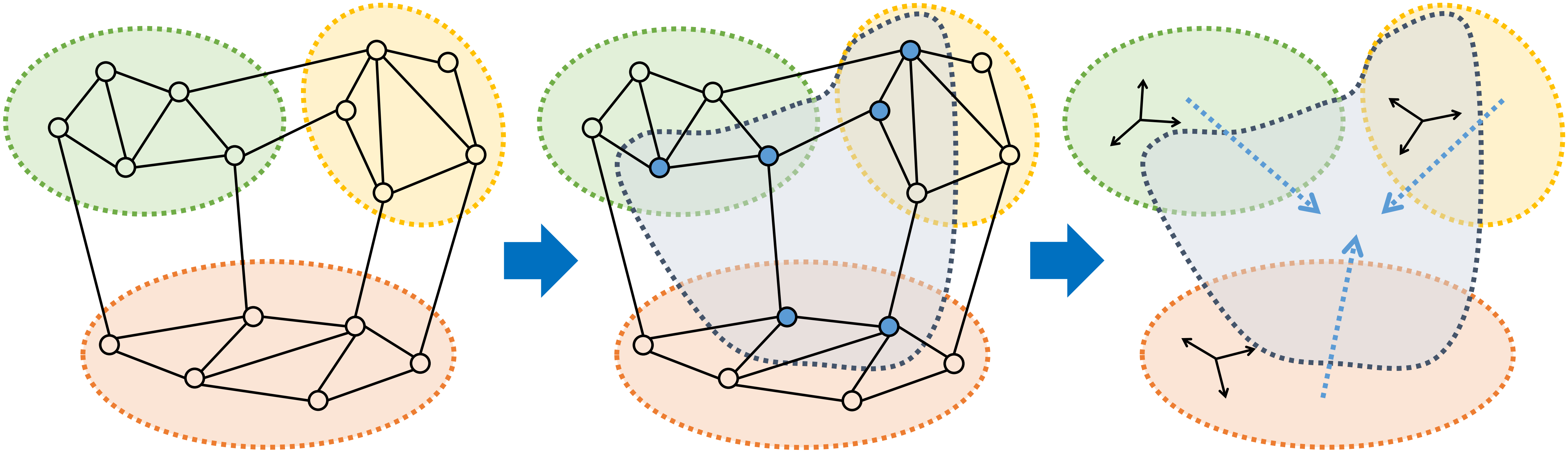
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **基准**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA via **Global Reference**, IRAv3+）
  - 解决**IRA++/IRAv3**中基于类间旋转平均的全局对齐存在的**类间连接弱**与**对齐精度低**的问题



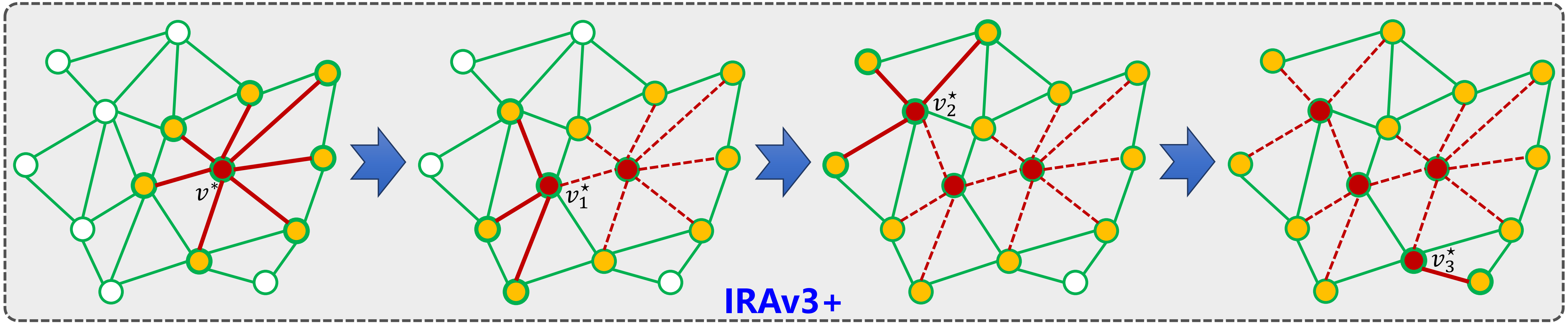
纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

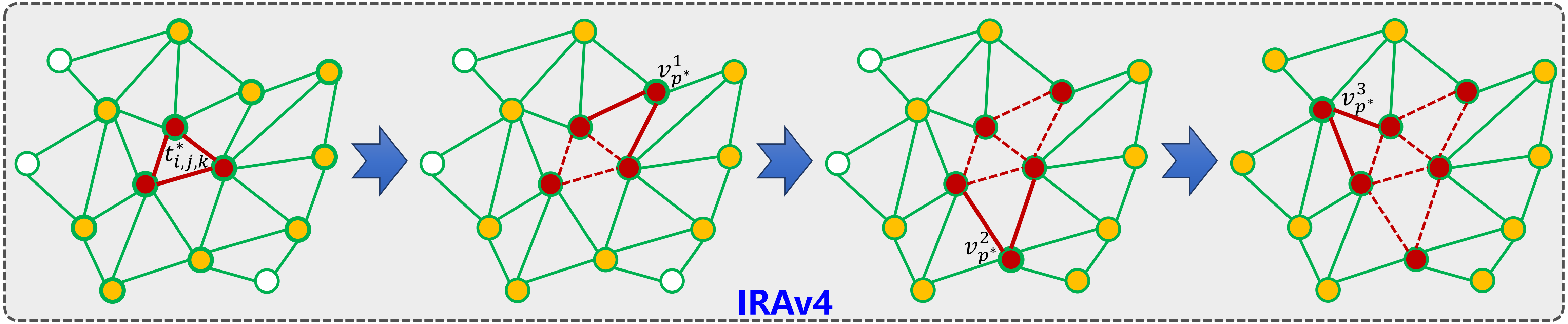
- **基准**层级增量式旋转平均（Hierarchical IRA via **Global Reference**, IRAv3+）
  - 解决**IRA++/IRAv3**中基于类间旋转平均的全局对齐存在的**类间连接弱**与**对齐精度低**的问题
  - 在原始外极几何图中随机抽取多条**连通支配集**，用作类内局部绝对旋转的**全局对齐基准**
    - 连通支配集：原始图的连通子集，且原始图中的全部顶点或属于该子集或与该子集某顶点相邻



纵向深化：层级式旋转平均（Hierarchical Rotation Averaging）

- **在线**基准层级增量式旋转平均（HIRA via **on-the-fly Global Reference**, IRAv4）
  - 解决**IRAv3+**中构建的基于MCDSs的局部绝对旋转全局对齐基准存在的**预先固定**与**任务无关**的问题





旋转平均实验评测

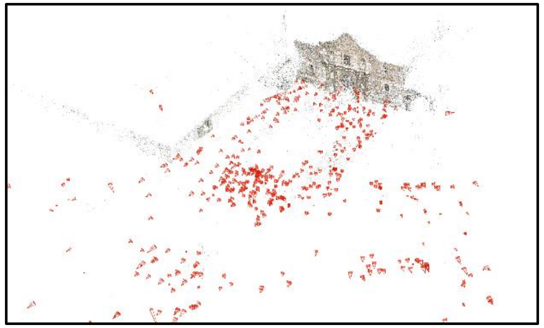
- 实验数据：1DSfM

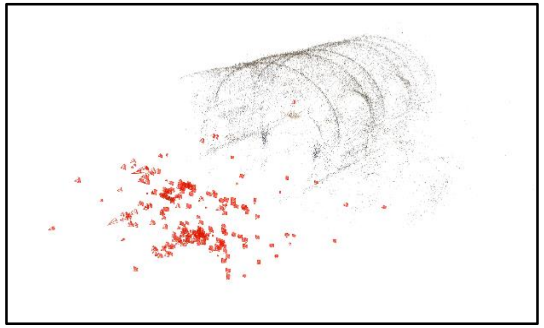
	$\lvert\mathcal{V}\rvert$	$\lvert\mathcal{V}_{\mathrm{GT}}\rvert$	$\lvert\mathcal{E}\rvert$	$\tilde{n}_{i,j}$	$\bar{n}_{i,j}$	$\tilde{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$	$\bar{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$	$\tilde{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$	$\bar{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$
ALM	627	577	97206	105	192	2.78°	9.09°	4.65°	18.80°
ELS	247	227	20297	106	160	2.89°	12.50°	8.75°	36.66°
GDM	742	677	48144	73	144	12.30°	33.33°	26.87°	52.65°
MDR	394	341	23784	61	128	9.34°	29.30°	13.46°	36.30°
MND	474	450	52424	180	310	1.67°	7.51°	3.33°	18.61°
NYC	376	332	20680	80	167	4.22°	14.14°	7.18°	28.86°
PDP	354	338	24710	87	128	1.81°	8.38°	3.07°	21.75°
PIC	2508	2152	319257	56	97	4.93°	19.09°	2.92°	7.71°
ROF	1134	1084	70187	65	188	2.97°	13.83°	4.01°	30.19°
TOL	508	472	23863	81	220	2.60°	11.58°	2.63°	19.92°
TFG	5433	5058	680012	71	109	3.01°	8.62°	6.56°	23.67°
USQ	930	789	25561	87	150	3.61°	9.02°	20.32°	43.22°
VNC	918	836	103550	229	408	2.59°	11.26°	4.24°	24.47°
YKM	458	437	27729	112	245	2.68°	11.16°	3.40°	21.20°

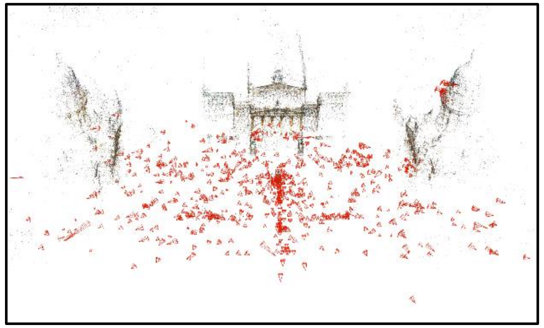
- $\lvert\mathcal{V}\rvert$，$\lvert\mathcal{E}\rvert$，$\lvert\mathcal{V}_{\mathrm{GT}}\rvert$：外极几何图顶点数与边数以及带有真值的顶点数
- $\tilde{n}_{i,j}$，$\bar{n}_{i,j}$：匹配图像对之间的图像局部特征匹配对数的中值与均值
- $\tilde{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$，$\bar{r}^{\boldsymbol{R}}_{i,j}$：匹配图像对之间的相对旋转测量值的角度误差中值与均值
- $\tilde{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$，$\bar{r}^{\boldsymbol{t}}_{i,j}$：匹配图像对之间的相对平移测量值的角度误差中值与均值

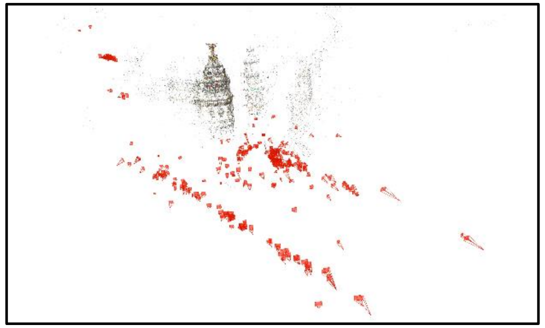
旋转平均实验评测

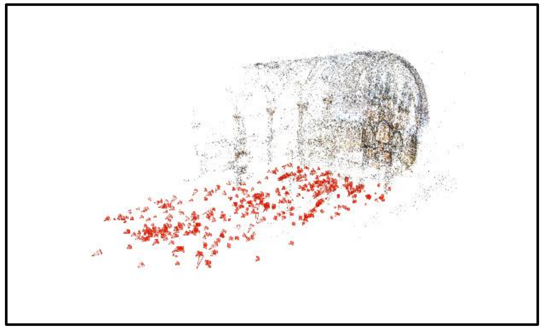
- 实验数据：1DSfM

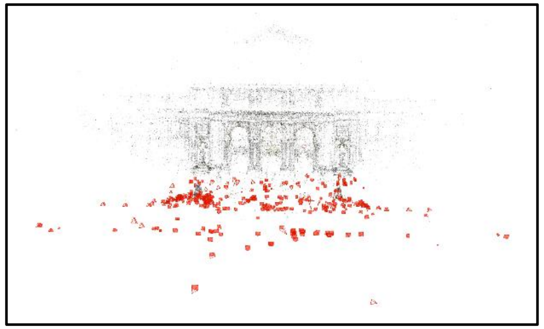

ALM

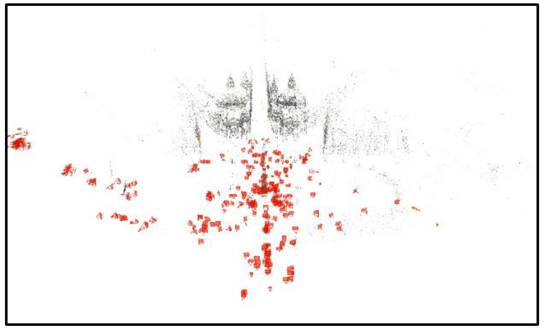

ELS

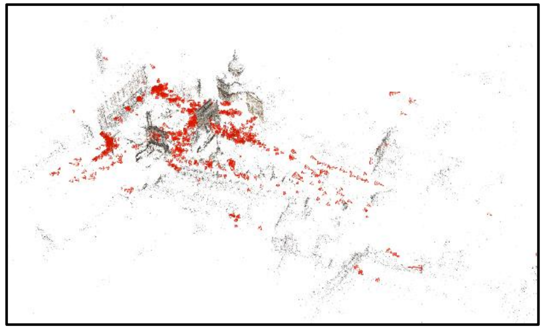

GDM

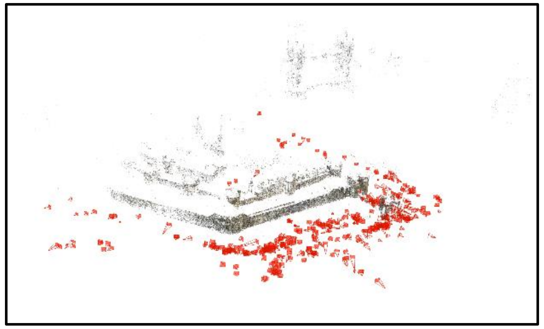

MDR

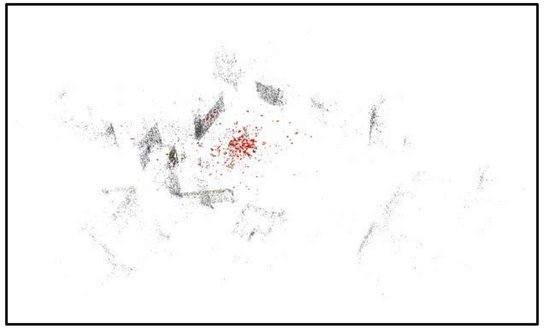

MND

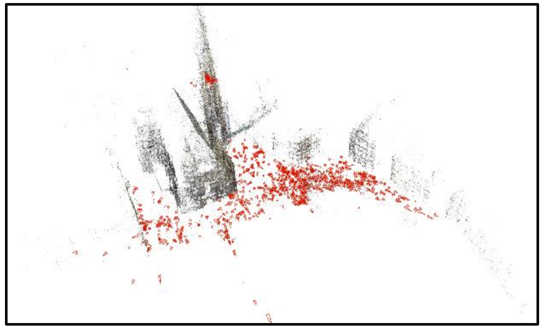

NYC


PDP


ROF


TOL

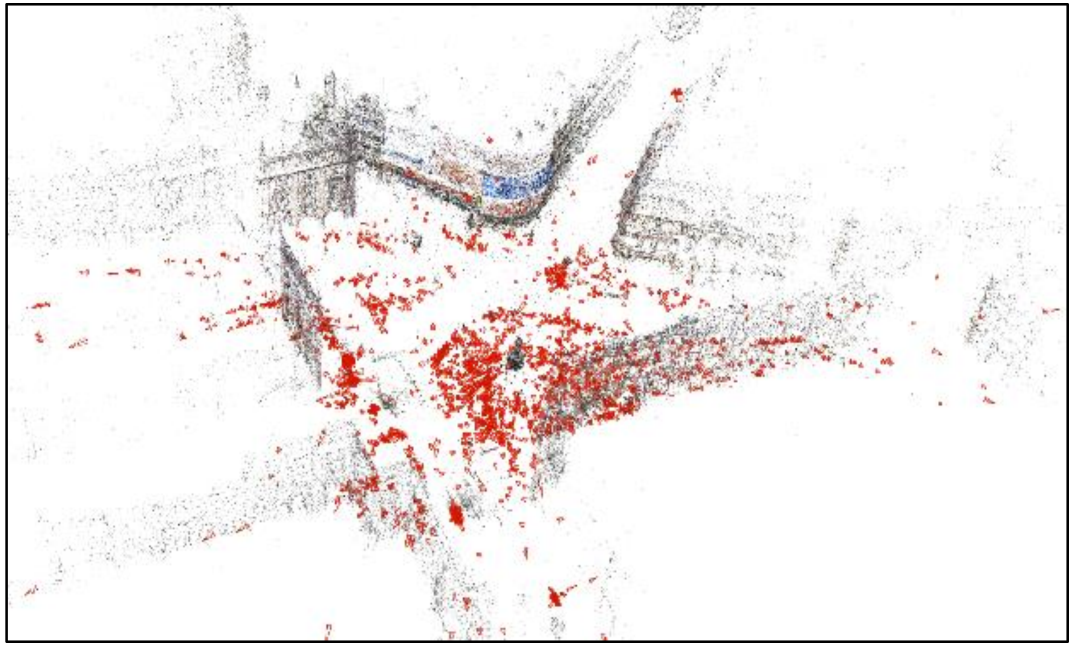

USQ


PDP

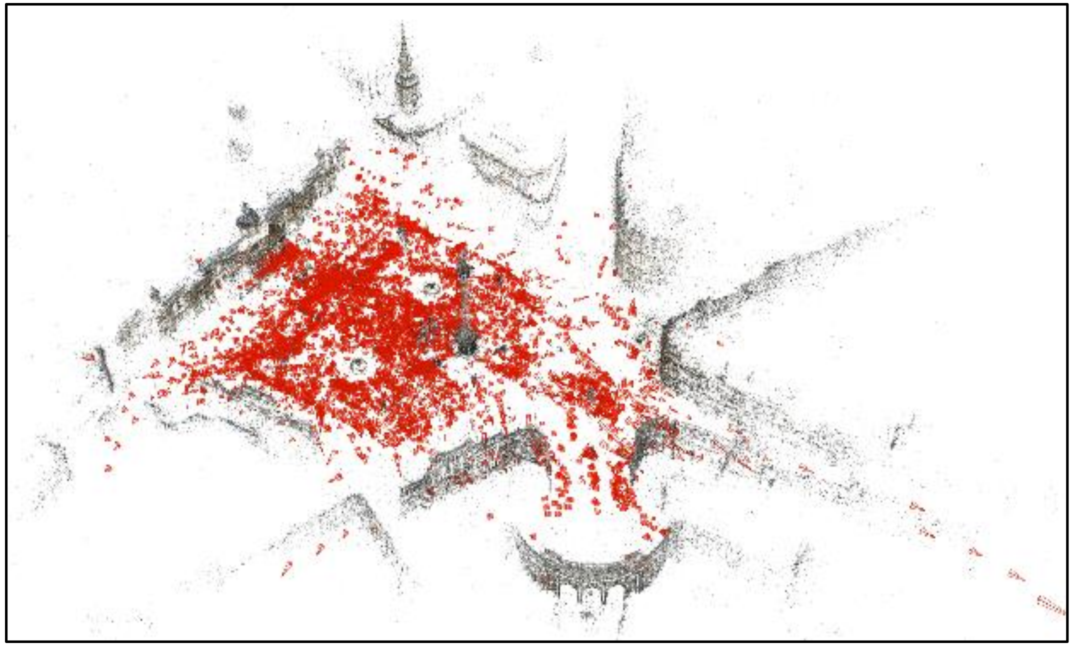

ROF

旋转平均实验评测

- 实验数据：1DSfM



PIC



TFG

旋转平均实验评测

- 实验结果

Data	Robust loss-based			Outlier filtering-based			Deep learning-based			IRA series				
	IRLS-$\ell_{\frac{1}{2}}$[1]	MPLS[2]	DESC[3]	OMSTs[4]	HRRA[5]	HARA[6]	NeuRoRA[7]	MSP[8]	RAGO [9]	IRA	IRA++	IRAv3	IRAv3+	IRAv4
ALM	2.14°	1.16°	1.63°	1.26°	1.03°	1.15°	1.16°	1.07°	0.88°	0.83°	0.80°	0.73°	0.72°	0.73°
ELS	1.15°	0.88°	1.01°	0.75°	0.59°	0.62°	0.64°	0.83°	0.46°	0.51°	0.46°	0.44°	0.39°	0.41°
GDM	28.20°	9.87°	9.43°	45.15°	4.04°	63.74°	2.94°	3.69°	2.68°	5.32°	2.88°	1.99°	2.20°	1.90°
MDR	3.08°	1.26°	2.35°	1.12°	2.54°	1.50°	1.13°	1.09°	1.03°	0.85°	0.83°	0.75°	0.75°	0.74°
MND	0.71°	0.51°	0.59°	0.68°	0.62°	0.51°	0.60°	0.50°	0.46°	0.51°	0.50°	0.44°	0.40°	0.40°
NYC	1.40°	1.24°	1.48°	1.30°	1.24°	1.37°	1.18°	1.12°	0.71°	1.00°	0.95°	0.82°	0.81°	0.77°
PDP	2.62°	1.93°	1.95°	1.73°	0.92°	0.92°	0.79°	0.76°	0.63°	0.90°	0.75°	0.72°	0.63°	0.62°
PIC	3.12°	1.81°	2.43°	1.41°	4.87°	3.22°	1.91°	1.80°	0.58°	1.67°	1.70°	1.50°	1.55°	1.40°
ROF	1.70°	1.37°	1.42°	1.85°	2.48°	2.42°	1.31°	1.19°	1.10°	1.51°	1.24°	1.09°	1.14°	0.96°
TOL	2.45°	2.20°	2.49°	2.10°	2.05°	2.36°	1.46°	1.25°	1.20°	2.45°	1.33°	1.44°	1.09°	1.11°
TFG	2.03°	—	1.84°	2.63°	4.88°	2.06°	2.25°	—	1.53°	3.30°	1.74°	1.49°	1.80°	1.79°
USQ	4.97°	3.48°	4.31°	3.83°	3.77°	4.78°	2.01°	1.85°	1.92°	4.40°	3.70°	3.27°	2.77°	3.15°
VNC	4.64°	2.83°	1.99°	3.30°	1.84°	1.49°	1.50°	1.10°	0.89°	1.02°	0.94°	0.86°	0.76°	0.80°
YKM	1.62°	1.45°	1.60°	1.55°	1.57°	1.65°	0.99°	0.91°	0.92°	1.57°	1.38°	1.36°	0.98°	1.20°
Rank	12.71	9.62	11.36	10.29	10.14	10.71	7.71	5.92	3.14	8.07	5.21	3.43	2.57	2.21

[1] A. Chatterjee and V. M. Govindu. Robust Relative Rotation Averaging[J]. *IEEE T-PAMI*, 2018.
[2] Y. Shi and G. Lerman. Message Passing Least Squares Framework and its Application to Rotation Synchronization[C]. *In Proc. ICML*, 2020.
[3] Y. Shi, C. M. Wyeth, and G. Lerman. Robust Group Synchronization via Quadratic Programming[C]. *In Proc. ICML*, 2022.
[4] H. Cui, S. Shen, W. Gao, L. Hong, and Z. Wang. Efficient and Robust Large-Scale Structure-from-Motion via Track Selection and Camera Prioritization[J]. *ISPRS P&RS*, 2019.
[5] X. Gao, J. Luo, K. Li, and Z. Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging[J]. *IEEE SPL*, 2020.
[6] S. H. Lee and J. Civera. HARA: A Hierarchical Approach for Robust Rotation Averaging[C] *In Proc. CVPR*, 2022.
[7] P. Purkait, T. J. Chin, and I. Reid. NeuRoRA: Neural Robust Rotation Averaging[C]. *In Proc. ECCV*, 2020.
[8] L. Yang, H. Li, J. A. Rahim, Z. Cui, and P. Tan. End-to-End Rotation Averaging with Multi-Source Propagation[C]. *In Proc. CVPR*, 2021.
[9] H. Li, Z. Cui, S. Liu, and P. Tan. RAGO: Recurrent Graph Optimizer for Multiple Rotation Averaging[C]. *In Proc. CVPR*, 2022.

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 旋转平均 vs. 平移平均

  - 相机位姿基本**约束方程**：$\boldsymbol{R}_{i,j}=\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i^{\top}$；$\boldsymbol{t}_{i,j}=\boldsymbol{R}_j\frac{\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j\|}=\frac{1}{b_{i,j}}\boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j)$

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

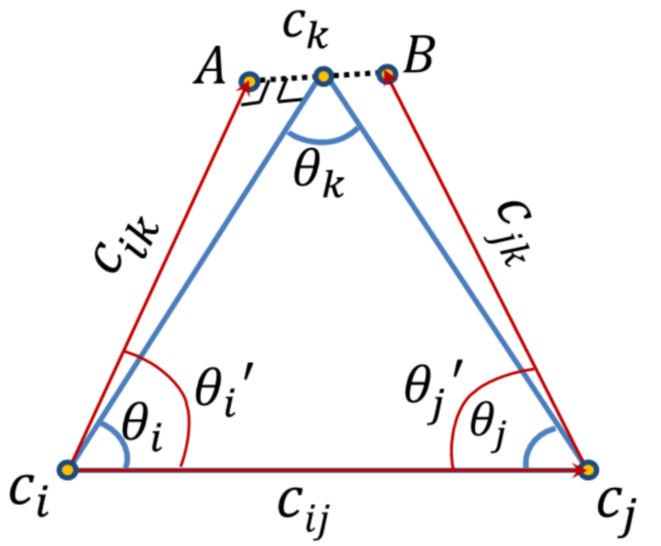
- 旋转平均 vs. 平移平均
  - 相机位姿基本**约束方程**：$\boldsymbol{R}_{i,j}=\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i^\top$；$\boldsymbol{t}_{i,j}=\boldsymbol{R}_j\frac{\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j\|}=\frac{1}{b_{i,j}}\boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j)$
  - 相机旋转**链式递推**求解：已知$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{R}_{i,j}$，求解$\boldsymbol{R}_j \Rightarrow \boldsymbol{R}_j=\boldsymbol{R}_{i,j}\boldsymbol{R}_i$
  - 相机位置**链式递推**求解：已知$\boldsymbol{c}_i$、$\boldsymbol{R}_j$、$b_{i,j}$、$\boldsymbol{t}_{i,j}$，求解$\boldsymbol{c}_j \Rightarrow \boldsymbol{c}_j=\boldsymbol{c}_i-b_{i,j}\boldsymbol{R}_j^\top\boldsymbol{t}_{i,j}$

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 旋转平均 vs. 平移平均

  - 相机位姿基本**约束方程**：$\boldsymbol{R}_{i,j}=\boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i^\top$； $\boldsymbol{t}_{i,j}=\boldsymbol{R}_j\frac{\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j\|}=\frac{1}{b_{i,j}}\boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j)$
  - 相机旋转**链式递推**求解：已知$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{R}_{i,j}$，求解$\boldsymbol{R}_j \Longrightarrow \boldsymbol{R}_j=\boldsymbol{R}_{i,j}\boldsymbol{R}_i$
  - 相机位置**链式递推**求解：已知$\boldsymbol{c}_i$、$\boldsymbol{R}_j$、$b_{i,j}$、$\boldsymbol{t}_{i,j}$，求解$\boldsymbol{c}_j \Longrightarrow \boldsymbol{c}_j=\boldsymbol{c}_i-b_{i,j}\boldsymbol{R}_j^\top\boldsymbol{t}_{i,j}$
  - **线性三焦张量算子**求解：已知$\boldsymbol{c}_i$、$\boldsymbol{c}_j$、$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{R}_j$、$\boldsymbol{R}_k$、$\boldsymbol{t}_{i,j}$、$\boldsymbol{t}_{i,k}$、$\boldsymbol{t}_{j,k}$，求解$\boldsymbol{c}_k \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{c}_k=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}_i(\theta_i')s_{i,j}^{i,k}(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{c}_i)+\boldsymbol{R}_j(-\theta_j')s_{i,j}^{j,k}(\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j)+\boldsymbol{c}_i+\boldsymbol{c}_j\right)$$

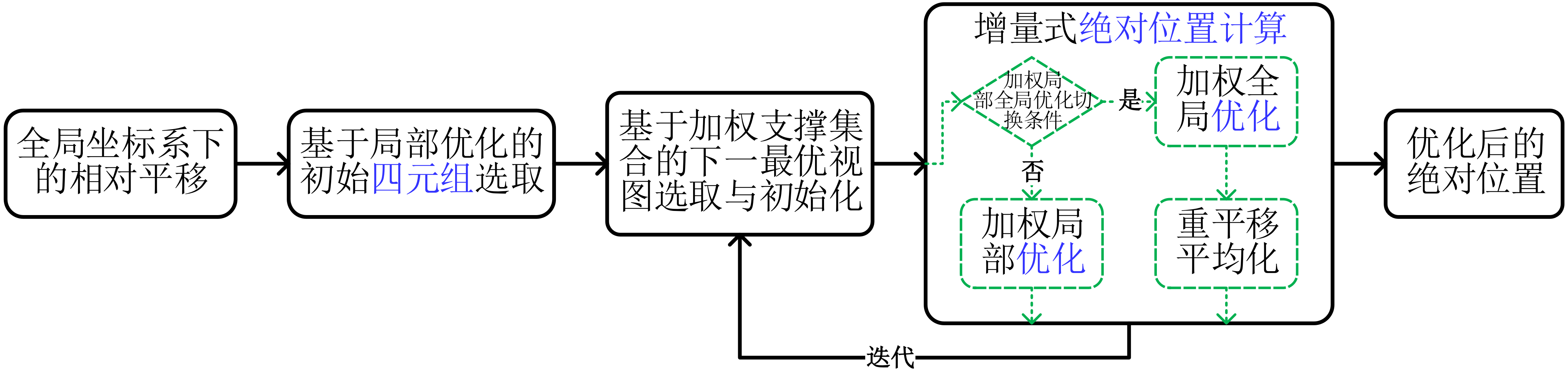


Jiang et al. In Proc. ICCV 2013

By X. Gao

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 增量式平移平均
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子
    - 流程关键技术
    - 优化目标函数



横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 增量式平移平均
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子

      IRA，已知$\boldsymbol{R}_i$、$\boldsymbol{R}_{i,j}$，求$\boldsymbol{R}_j$：$\boldsymbol{R}_j = \boldsymbol{R}_{i,j}\boldsymbol{R}_i$

      ITA，已知$\boldsymbol{c}_i$、$\boldsymbol{c}_j$、$\boldsymbol{c}_{i,j}$、$\boldsymbol{c}_{i,k}$、$\boldsymbol{c}_{j,k}$，求$\boldsymbol{c}_k$：

$$\boldsymbol{c}_k = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}_i(\theta_i')s_{i,j}^{i,k}(\boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{c}_i) + \boldsymbol{R}_j(-\theta_j')s_{i,j}^{j,k}(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j) + \boldsymbol{c}_i + \boldsymbol{c}_j\right)$$

    - 流程关键技术
    - 优化目标函数

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 增量式平移平均
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子
    - 流程关键技术

      IRA，基于局部优化的初始三元组选取：

$$i^*, j^*, k^* = \arg\max \left\{ \sum_{\substack{v_i, v_j \in \mathcal{V}_{t_{i,j,k}} \\ e_{i,j} \in \mathcal{E}_{t_{i,j,k}}}} n_{i,j} \cos\left(d_\theta^{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j^* \boldsymbol{R}_i^{*\top} \right) \right) \middle| t_{i,j,k} \in \mathcal{T}^* \right\}$$

      ITA，基于局部优化的初始四元组选取：

$$i^*, j^*, k^*, l^* = \arg\max \left\{ \sum_{\substack{v_i, v_j \in \mathcal{V}_{q_{i,j,k,l}} \\ e_{i,j} \in \mathcal{E}_{q_{i,j,k,l}}}} \boldsymbol{c}_{i,j} \cdot \frac{\boldsymbol{c}_j^* - \boldsymbol{c}_i^*}{\left\| \boldsymbol{c}_j^* - \boldsymbol{c}_i^* \right\|} \middle| q_{i,j,k,l} \in \mathcal{Q}^* \right\}$$

    - 优化目标函数

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

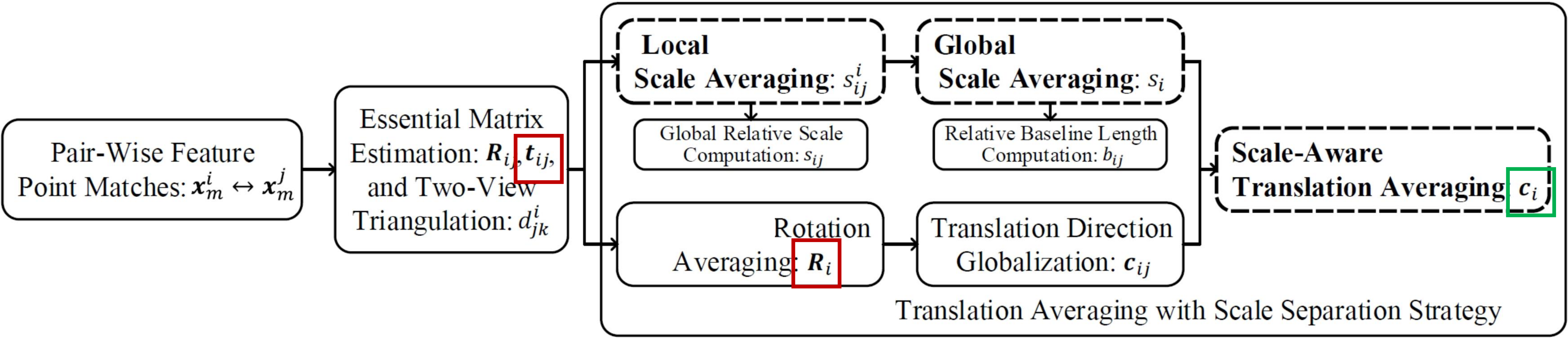
- 增量式平移平均
  - IRA ⇒ ITA
    - 相机位置算子
    - 流程关键技术
    - 优化目标函数

IRA，旋转矩阵角距离最小化：$\{\boldsymbol{R}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{v_i,v_j\in\mathcal{V} \\ e_{i,j}\in\mathcal{E}}} d_\theta^{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{R}_j\boldsymbol{R}_i^\top\right)^2$

ITA，位置向量弦距离最小化：$\{\boldsymbol{c}_i^*\} = \arg\min \sum_{\substack{v_i,v_j\in\mathcal{V} \\ e_{i,j}\in\mathcal{E}}} d_{ch}^{\boldsymbol{t}}\left(\boldsymbol{c}_{i,j}, \frac{\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{c}_i}{\|\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{c}_i\|}\right)^2$

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

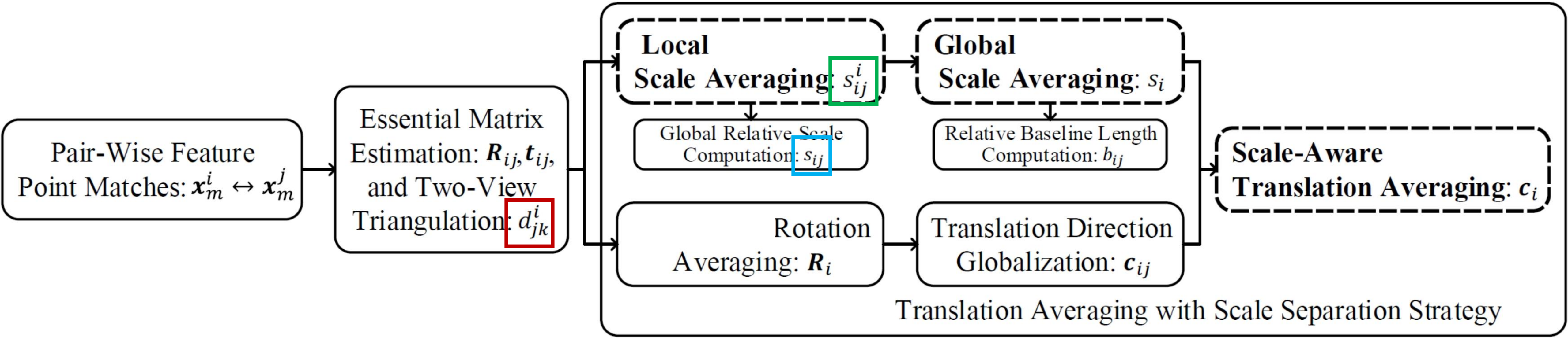
- 尺度分离平移平均
  - 原始问题（平移平均）**基本约束：** $\boldsymbol{R}_j\frac{\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j\|}=\frac{1}{b_{i,j}}\boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j)=\boldsymbol{t}_{i,j}$，已知$\{\boldsymbol{t}_{i,j}\},\{\boldsymbol{R}_i\}$，求解$\{\boldsymbol{c}_i\}$



Cui et al. In Proc. ICCV 2015

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

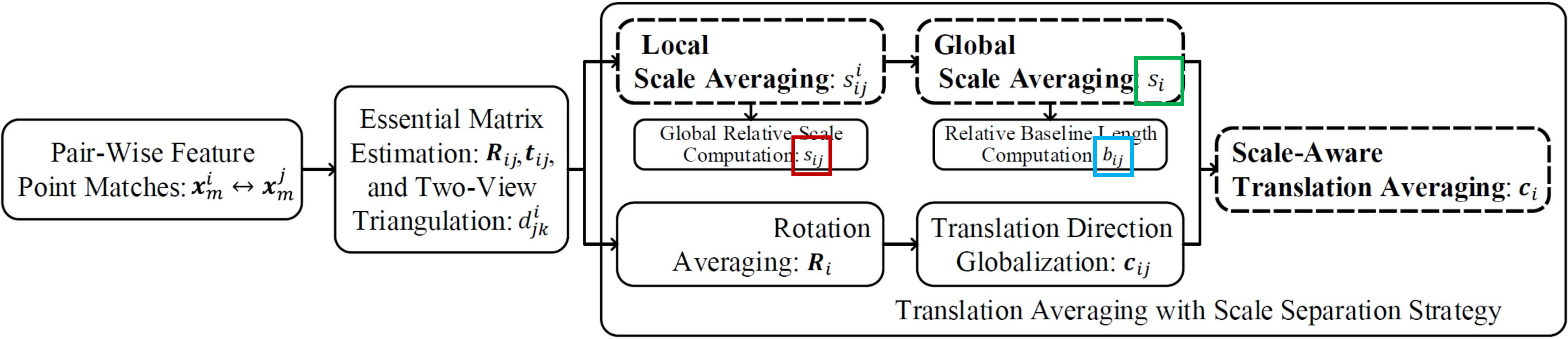
- 尺度分离平移平均
  - 原始问题（平移平均）**基本约束：** $R_j \frac{c_i - c_j}{\|c_i - c_j\|} = \frac{1}{b_{i,j}} \boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j) = \boldsymbol{t}_{i,j}$，已知$\{\boldsymbol{t}_{i,j}\}, \{\boldsymbol{R}_i\}$，求解$\{\boldsymbol{c}_i\}$
  - 子问题一（局部尺度平均）**基本约束：** $s^i_{i,k}/s^i_{i,j} = d^i_{j,k}$，已知$\{d^i_{j,k}\}$，求解$\{s^i_{i,j}\}$；全局相对尺度计算：$s_{i,j} = s^j_{j,i}/s^i_{i,j}$



Cui et al. In Proc. ICCV 2015

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

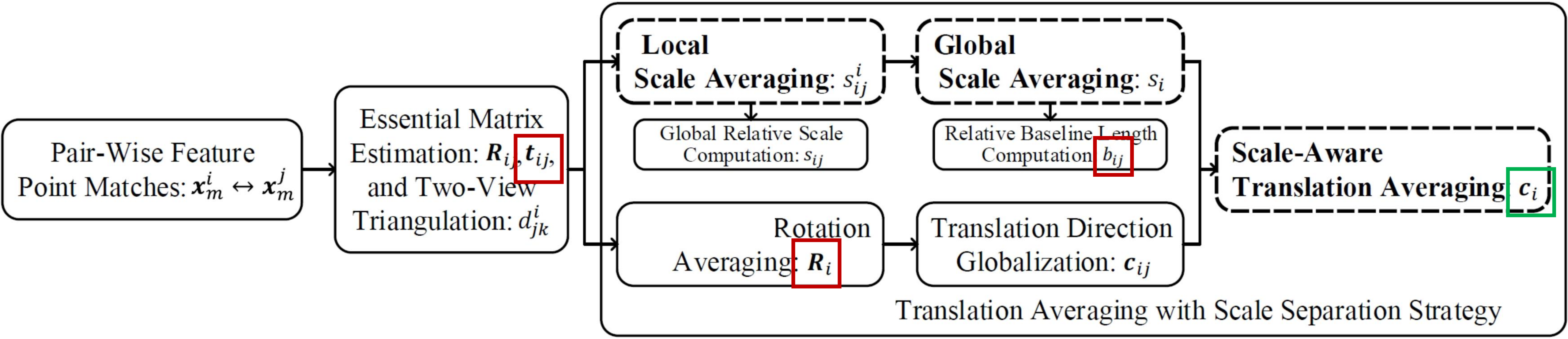
- 尺度分离平移平均
  - 原始问题（平移平均）**基本约束：** $\boldsymbol{R}_j \frac{\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j\|} = \frac{1}{b_{i,j}} \boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{c}_j) = \boldsymbol{t}_{i,j}$，已知$\{\boldsymbol{t}_{i,j}\},\{\boldsymbol{R}_i\}$，求解$\{\boldsymbol{c}_i\}$
  - 子问题一（局部尺度平均）**基本约束：** $s_{i,k}^i / s_{i,j}^i = d_{j,k}^i$，已知$\{d_{j,k}^i\}$，求解$\{s_{i,j}^i\}$；全局相对尺度计算：$s_{i,j} = s_{j,i}^j / s_{i,j}^i$
  - 子问题二（全局尺度平均）**基本约束：** $s_i / s_j = s_{i,j}$，已知$\{s_{i,j}\}$，求解$\{s_i\}$；相对基线长度计算：$b_{i,j} = \frac{1}{2}\left(s_i s_{i,j}^i + s_j s_{j,i}^j\right)$



Cui et al. In Proc. ICCV 2015

横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

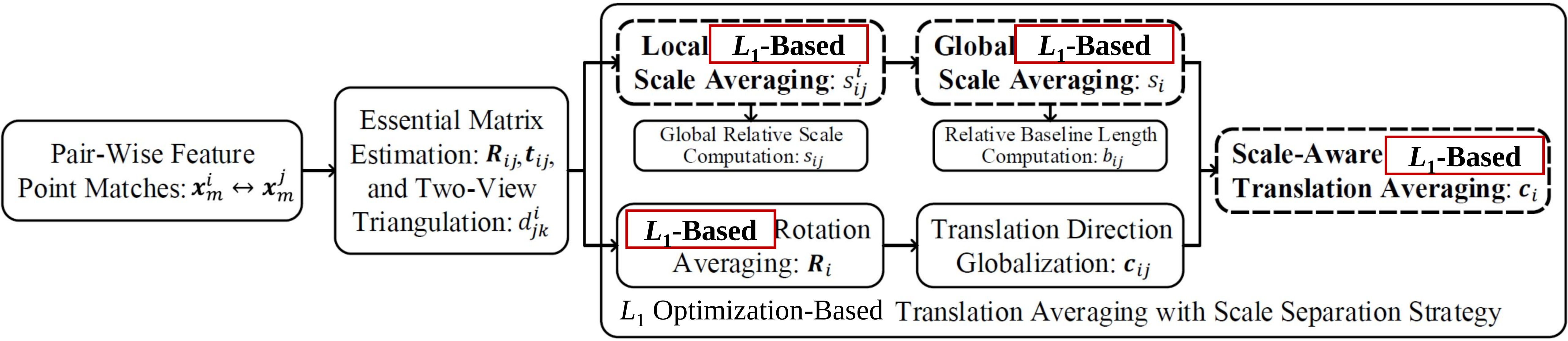
- 尺度分离平移平均
  - 原始问题（平移平均）**基本约束：** $\boldsymbol{R}_j \frac{\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j}{\|\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j\|} = \frac{1}{b_{i,j}}\boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j) = \boldsymbol{t}_{i,j}$，已知$\{\boldsymbol{t}_{i,j}\},\{\boldsymbol{R}_i\}$，求解$\{\boldsymbol{c}_i\}$
  - 子问题一（局部尺度平均）**基本约束：** $s_{i,k}^i/s_{i,j}^i = d_{j,k}^i$，已知$\{d_{j,k}^i\}$，求解$\{s_{i,j}^i\}$；全局相对尺度计算：$s_{i,j} = s_{j,i}^j/s_{i,j}^i$
  - 子问题二（全局尺度平均）**基本约束：** $s_i/s_j = s_{i,j}$，已知$\{s_{i,j}\}$，求解$\{s_i\}$；相对基线长度计算：$b_{i,j} = \frac{1}{2}\left(s_i s_{i,j}^i + s_j s_{j,i}^j\right)$
  - 子问题三（尺度已知的平移平均）**基本约束：** $\boldsymbol{R}_j(\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{c}_j) = b_{i,j}\boldsymbol{t}_{i,j}$，已知$\{b_{i,j},\boldsymbol{t}_{i,j}\},\{\boldsymbol{R}_i\}$，求解$\{\boldsymbol{c}_i\}$



Cui et al. In Proc. ICCV 2015

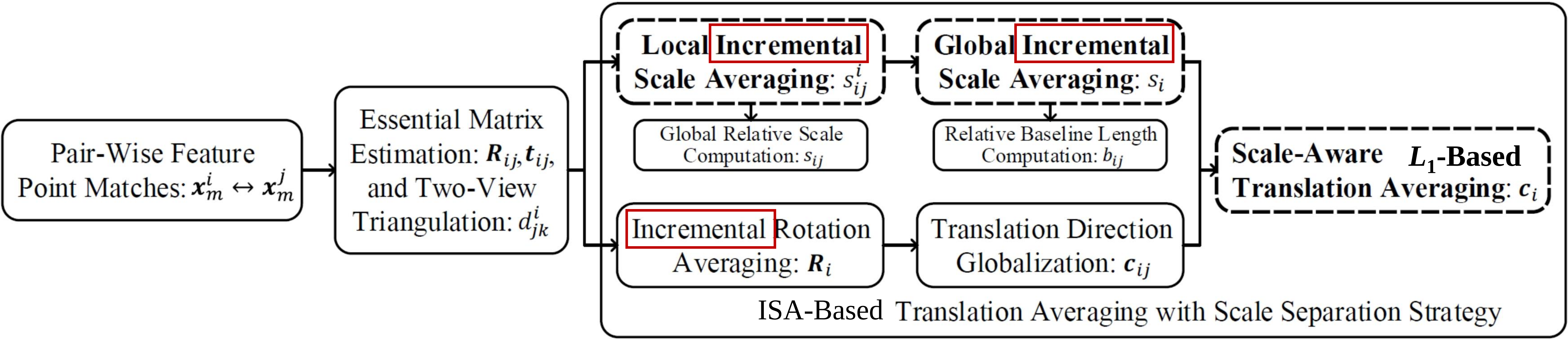
横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 基于L_1优化的尺度分离平移平均（L_1SA-L_1TA）



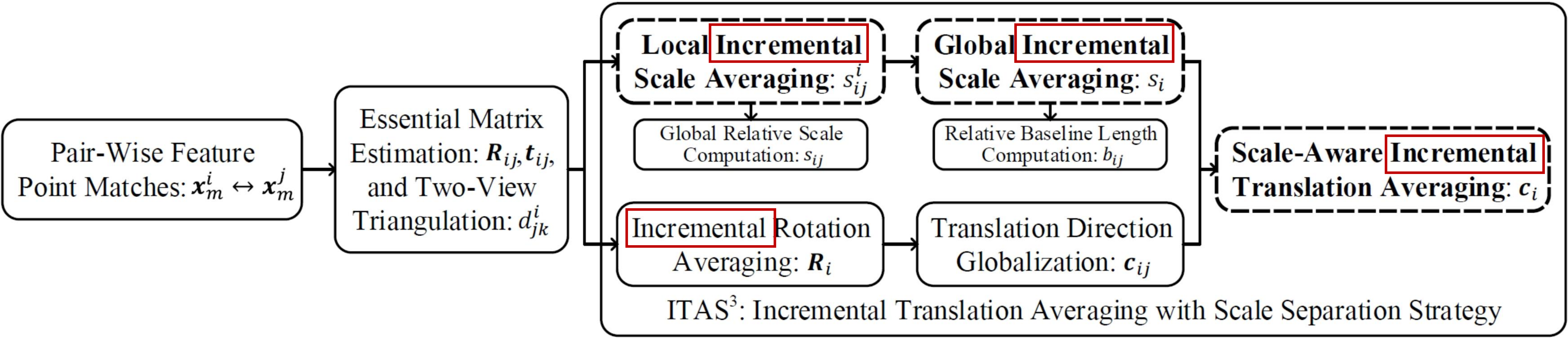
横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 基于增量式尺度平均的平移平均（ISA-L_1TA）



横向迁移：增量式平移平均（Incremental Translation Averaging）

- 基于尺度分离的增量式平移平均（ISA-ITA）



平移平均实验评测

- 实验结果

Data	BATA [1]		GLOMAP [2]		ITA [3]		L_1SA-L_1TA [4]		ISA-L_1TA [5]		ITAS^3 [6]	
	$\tilde{e}_c$	$\bar{e}_c$	$\tilde{e}_c$	$\bar{e}_c$	$\tilde{e}_c$	$\bar{e}_c$	$\tilde{e}_c$	$\bar{e}_c$	$\tilde{e}_c$	$\bar{e}_c$	$\tilde{e}_c$	$\bar{e}_c$
ALM	0.69	1.16	0.72	4.23	0.46	2.36	0.49	0.77	0.47	0.74	**0.43**	**0.73**
ELS	3.44	20.72	4.07	36.10	1.62	2.44	2.82	4.08	1.53	2.43	**1.45**	**2.34**
GDM	3.11	17.25	31.40	49.90	2.23	48.22	3.19	16.11	1.15	1.75	**0.99**	**1.70**
MDR	1.46	4.16	2.43	14.50	6.1e2	3.4e4	1.61	3.58	1.10	1.83	**0.71**	**1.50**
MND	0.68	0.85	0.86	7.48	0.47	1.5e4	0.50	0.60	**0.42**	**0.51**	**0.42**	0.57
NYC	0.67	0.99	0.85	8.70	0.52	0.80	0.62	0.78	**0.46**	**0.67**	0.48	0.70
PDP	0.79	3.40	1.70	9.64	**0.76**	70.89	0.90	2.18	0.78	1.95	**0.76**	**1.82**
PIC	1.07	1.76	1.54	66.00	0.79	3.3e2	1.40	1.99	0.75	**1.30**	**0.73**	1.39
ROF	3.85	7.17	2.63	2.8e2	**1.53**	**2.59**	5.37	6.61	2.78	7.63	2.97	7.67
TOL	2.88	3.82	3.80	13.60	2.11	3.18	5.08	6.42	2.49	3.33	**2.03**	**2.69**
TFG	3.76	5.52	4.46	8.5e2	2.56	6.34	6.18	9.40	2.16	**3.12**	**2.12**	3.60
USQ	2.10	**2.86**	8.85	11.40	**1.19**	14.59	14.01	14.59	2.38	3.31	2.48	3.72
VNC	1.32	3.98	3.74	17.10	1.24	3.88	1.42	3.13	1.28	2.35	**1.14**	**1.85**
YKM	0.97	7.73	5.47	28.40	0.86	2.16	1.32	2.15	0.95	1.64	**0.85**	**1.42**

[1] B. Zhuang, L. Cheong, and G. H. Lee. Baseline Desensitizing in Translation Averaging[C]. *In Proc. CVPR*, 2018.

[2] L. Pan, D. Barath, M. Pollefeys, and J. Schonberger. Global Structure-from-Motion Revisited[C]. *In Proc. ECCV*, 2024.

[3] X. Gao, L. Zhu, B. Fan, H. Liu, and S. Shen. Incremental Translation Averaging[J]. *IEEE T-CSVT*, 2022.

[4] Z. Cui and P. Tan. Global Structure-from-Motion by Similarity Averaging[C]. *In Proc. ICCV*, 2015.

[5] M. Li, X. Gao, Z. Xie, and S. Shen. Incremental Scale Estimation-Based Camera Location Recovery[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2024.

[6] M. Li, X. Gao, H. Cui, Y. Liu, Z. Xie, and S. Shen. Incremental Translation Averaging with Scale Separation Strategy[J]. *Submitted to IEEE T-CSVT*

总结展望

- 总结
  - 原始基准方法
    - 增量式旋转平均：IRA, IJCV 2021
  - 纵向问题深化
    - 层级增量式旋转平均：IRA++, IEEE T-CSVT 2022
    - 在线层级增量式旋转平均：IRAv3, IEEE T-CSVT 2023
    - 基准层级增量式旋转平均：IRAv3+, IEEE T-CSVT 2024
    - 在线基准层级增量式旋转平均：IRAv4, Pattern Recognition Major Revision
  - 横向问题迁移
    - 增量式平移平均：ITA, IEEE T-CSVT 2022
    - 尺度分离增量式尺度平均：ISE-L_1TA, Journal of Image and Graphics 2024
    - 尺度分离增量式平移平均：ITAS^3, Submitted to IEEE T-CSVT

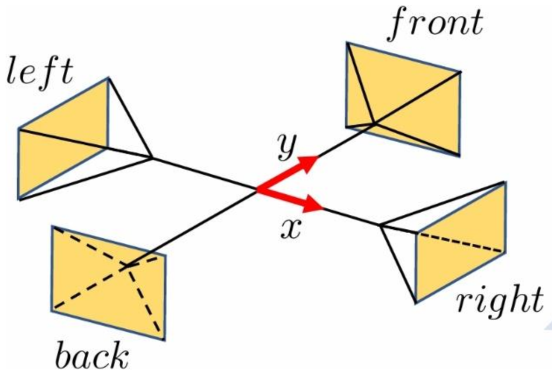
总结展望

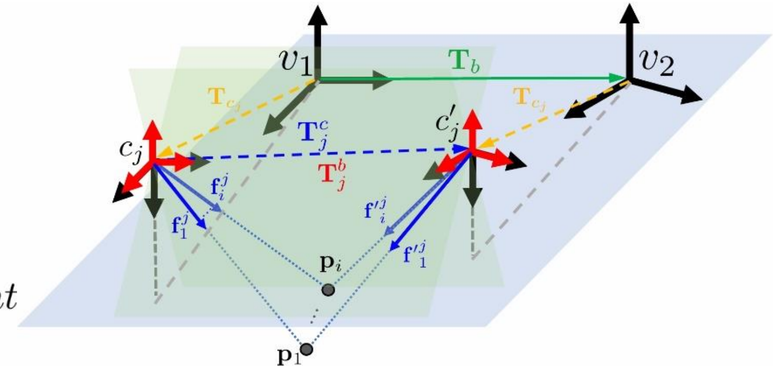
- ## 展望
  - 传统几何方法深化

已知：$\{s_i, \boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{c}_i\}, \left\{s_{i,j}^i, s_{j,i}^j, \boldsymbol{R}_{i,j}, \boldsymbol{t}_{i,j}\right\}$；**求解**：$\{s_j, \boldsymbol{R}_j, \boldsymbol{c}_j\}$

- $s_j = s_i / s_{i,j} = s_i s_{i,j}^i / s_{j,i}^j$
- $\Rightarrow \boldsymbol{R}_j = \boldsymbol{R}_{i,j} \boldsymbol{R}_i$
- $\Rightarrow b_{i,j} = \frac{1}{2}\left(s_i s_{i,j}^i + s_j s_{j,i}^j\right) = s_i s_{i,j}^i$
- $\Rightarrow \boldsymbol{c}_j = \boldsymbol{c}_i - b_{i,j} \boldsymbol{R}_j^\top \boldsymbol{t}_{i,j} = \boldsymbol{c}_i - s_i s_{i,j}^i \boldsymbol{R}_i^\top \boldsymbol{R}_{i,j}^\top \boldsymbol{t}_{i,j}$

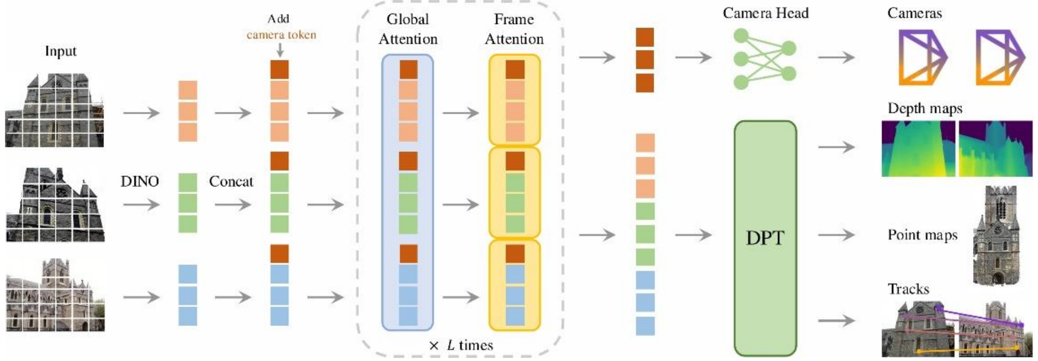
增量式**运动平均**



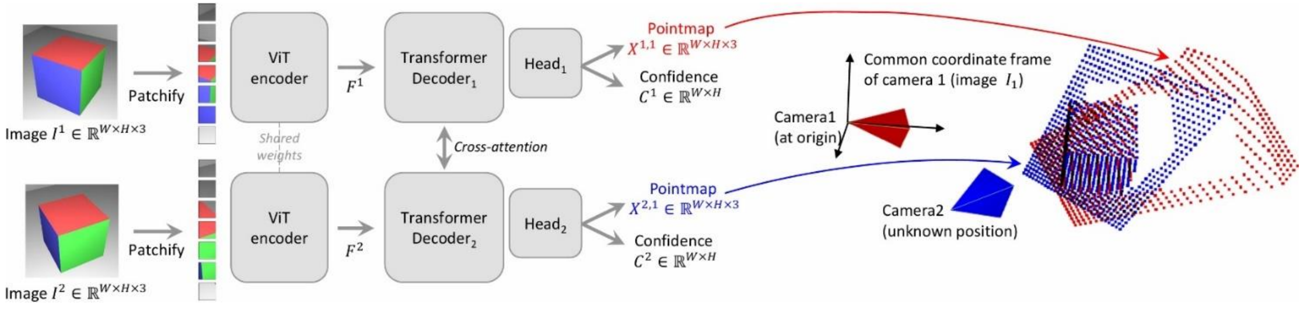


多相机增量式运动平均

  - 三维基础模型引入



VGGT CVPR 2025



DUSt3R CVPR 2024

相关成果

[1] Menghan Li, **Xiang Gao***, Zexiao Xie, and Shuhan Shen. Incremental Scale Estimation-Based Camera Location Recovery. ***Journal of Image and Graphics 2024***

[2] **Xiang Gao**, Lingjie Zhu, Zexiao Xie, Hongmin Liu*, and Shuhan Shen*. Incremental Rotation Averaging. ***International Journal of Computer Vision 2021***

[3] **Xiang Gao**, Lingjie Zhu, Hainan Cui, Zexiao Xie, and Shuhan Shen*. IRA++: Distributed Incremental Rotation Averaging. ***IEEE T-CSVT 2022***

[4] **Xiang Gao**, Hainan Cui, Menghan Li, Zexiao Xie, and Shuhan Shen*. IRAv3: Hierarchical Incremental Rotation Averaging on the Fly. ***IEEE T-CSVT 2023***

[5] **Xiang Gao**, Hainan Cui, Wantao Huang, Menghan Li, and Shuhan Shen*. IRAv3+: Hierarchical Incremental Rotation Averaging via MCDSs. ***IEEE T-CSVT 2024***

[6] **Xiang Gao**, Lingjie Zhu, Bin Fan, Hongmin Liu*, and Shuhan Shen*. Incremental Translation Averaging. ***IEEE T-CSVT 2022***

[7] **Xiang Gao**, Jiazheng Luo, Kunqian Li*, and Zexiao Xie. Hierarchical RANSAC-Based Rotation Averaging. ***IEEE Signal Processing Letters 2020***

[8] **Xiang Gao**, Menghan Li, and Shuhan Shen*. Large-Scale Structure from Motion: A Survey. ***Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics 2024***

[9] **Xiang Gao**, Hainan Cui, Yangdong Liu, and Shuhan Shen*. Incremental Rotation Averaging Revisited. ***Pattern Recognition Major Revision***

[10] Menghan Li#, **Xiang Gao#***, Hainan Cui, Yandong Liu, Zexiao Xie, and Shuhan Shen*. ITA with Scale Separation Strategy. ***Submitted to IEEE T-CSVT***

[11] Hainan Cui, **Xiang Gao**, Shuhan Shen, and Zhanyi Hu. HSfM: Hybrid Structure-from-Motion. ***In Proc. CVPR 2017***

[12] Hainan Cui, **Xiang Gao**, and Shuhan Shen*. MCSfM: Multi-Camera Based Incremental Structure-from-Motion. ***IEEE T-IP 2023***

[13] Qiulei Dong*, **Xiang Gao**, Hainan Cui, and Zhanyi Hu. Robust Camera Translation Estimation via Rank Enforcement. ***IEEE T-CYB 2022***

谢　谢

高　翔

中国科学院自动化研究所

电子邮箱：xiang.gao@ia.ac.cn

个人主页：https://xgao-3dv.github.io/